

MC SYLLABUS 1.6b

B. DORHOUT

J. KRIENS

J.TH. VAN LIESHOUT

LEERGANG BESLISKUNDE

DEEL 6b

WISKUNDIGE PROGRAMMERING 2

MATHEMATISCH CENTRUM

AMSTERDAM 1977

AMS(MOS) subject classification scheme (1970): 90C25, 90C50, 65K05

ISBN 90 6196 150 5

INHOUD

	blz.
Voorwoord	vii
9. De verdelingsmethode	1
10. Inleiding tot de convexe programmering	41
11. De stelling van Kuhn en Tucker; dualiteit	67
12. Toepassingen van convexe programmeringsmodellen	88

VOORWOORD

In deel 6a van de Leergang Besliskunde zijn onderwerpen uit de lineaire programmering besproken, in het bijzonder de algemene formulering van een lineair programmeringsprobleem en verschillende versies van de simplex-methode.

Het voorliggende deel 6b begint met een paragraaf over de verdelingsmethode, een gespecialiseerde vorm van de simplexmethode, welke vooral bij bepaalde typen transportproblemen met vrucht gebruikt kan worden en enkele variaties op deze methode.

Daarna wordt overgegaan op de meer algemene convexe programmering. Dit onderdeel bevat een inleiding in de convexe programmering, een enigszins vereenvoudigd bewijs van de stelling KUHN en TUCKER en tenslotte een overzicht van enkele aan de economische sfeer ontleende voorbeelden van problemen, die met behulp van convexe programmeringsmodellen geanalyseerd en in veel gevallen ook opgelost kunnen worden.

De paragrafen over oplossingsalgorithmen voor kwadratische en convexe programmeringsproblemen en over discrete programmering zullen verschijnen in een derde boekje, deel 6c.

9. DE VERDELINGSMETHODE

Veel uit de praktijk voortkomende lineaire programmeringsproblemen hebben de eigenschap, dat het merendeel van de variabelen in slechts enkele bijvoorwaarden optreedt. De matrices van de bijvoorwaarden van deze problemen bevatten hierdoor veel nullen. In §6 van deel 6a is reeds aangegeven, hoe in de herziene simplexmethode van deze eigenschap gebruik gemaakt wordt. Bij een voldoende groot aantal nullen bleek het rekenproces sneller te verlopen en de nauwkeurigheid van de oplossingen groter te zijn dan bij toepassing van de originele simplexmethode. Dikwijls echter kan men nog betere resultaten bereiken, wanneer men niet alleen let op het aantal nullen, maar ook op de plaatsen waar zij staan. Men komt dan tot speciale, meestal meer of minder met de simplexmethoden verwante, methoden. Hiervan behandelen we in deze paragraaf de zogenaamde *verdelingsmethode*. Deze is ontworpen voor het oplossen van het type transportproblemen, waarvan in voorbeeld 1.3 een illustratie is gegeven. Dit voorbeeld luidt in iets andere terminologie als volgt.

VOORBEELD 9.1. Een transportprobleem. Van een bepaald produkt zijn in m opslaghavens $P_1, \dots, P_m$ de hoeveelheden $a_1, \dots, a_m$ aanwezig. Deze moeten verscheept worden naar n bestemmingshavens $Q_1, \dots, Q_n$, waar respectievelijk de hoeveelheden $b_1, \dots, b_n$ nodig zijn. Wij onderstellen dat er evenveel goederen gevraagd worden als er opgeslagen zijn. De transportkosten zijn evenredig met de verscheepte hoeveelheden. Geeft men de vervoerskosten per eenheid van haven P_i naar bestemming Q_j aan met c_{ij} en de langs deze route vervoerde hoeveelheid met x_{ij} , dan kan men de transportkosten zo klein mogelijk maken door het minimum te bepalen van de functie

$$(9.1) \quad y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

onder de voorwaarden

$$(9.2) \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$(9.3) \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

en

$$(9.4) \quad x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n),$$

waarin de a_i en b_j niet-negatieve getallen zijn.

Wegens de gemaakte veronderstellingen moeten de a_i en b_j hierbij voldoen aan

$$(9.5) \quad \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

De verdelingsmethode is een aan het transportprobleem aangepaste versie van de simplexmethode, zoals die behandeld is in deel 6a. Wij zullen dan ook de begrippen basisoplossing, basisvector en dergelijke in dezelfde betekenis gebruiken als in de paragrafen 3 en 4. Wegens de formulering in variabelen met dubbele indices zal de gebruikte notatie echter enigszins afwijken. Als wij definiëren

$$C' = (c_{11}, \dots, c_{1n}, c_{21}, \dots, c_{2n}, \dots, c_{m1}, \dots, c_{mn}),$$

$$X' = (x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn}),$$

$$A'_0 = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n),$$

en

$$A'_{ij} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n),$$

waarbij de enen telkens staan op de plaatsen van de i -de en de $(m+j)$ -de component, dan kunnen wij (9.1) t/m (9.4) formuleren als:
minimaliseer

$$(9.6) \quad y = C'X$$

onder de voorwaarden

$$(9.7) \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij} x_{ij} = A_0$$

$$(9.8) \quad x \geq 0.$$

Worden de vectoren A_{ij} samengevat in de matrix^{*)}

^{*)} Lege plaatsen geven nullen aan.

$$(9.9) \quad A = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \overbrace{1 & 1 & \dots & 1}^n & & & & & & & \\ & \overbrace{1 & 1 & \dots & 1}^n & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & \overbrace{1 & 1 & \dots & 1}^n & & & \\ 1 & & & 1 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & 1 & & & & 1 & & \\ & & \ddots & & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 1 & & & 1 & & & & 1 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} m, \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} n$$

dan kan (9.7) vervangen worden door

$$(9.10) \quad Ax = A_0.$$

De verdelingsmethode verschilt in drie opzichten van de algemene simplex-methode:

- een niet-triviale toegelaten beginoplossing kan altijd op eenvoudige wijze worden bepaald,
- de berekeningen kunnen geschieden in een kleinere tabel,
- voor het uitvoeren van de transformaties in de tabel behoeft men slechts op te tellen en af te trekken.

Wij zullen de methode beschrijven aan de hand van voorbeeld 9.1. We nemen aan, dat $m = 4$ en $n = 5$ is. De hoeveelheden a_i bedragen respectievelijk 7, 6, 4 en 7 ton, de hoeveelheden b_j respectievelijk 5, 9, 2, 3 en 5 ton. De vergelijkingen (9.2) en (9.3) hebben dus de volgende vorm:

$$(9.11) \quad \sum_{j=1}^5 x_{1j} = 7, \quad \sum_{j=1}^5 x_{2j} = 6, \quad \sum_{j=1}^5 x_{3j} = 4, \quad \sum_{j=1}^5 x_{4j} = 7,$$

en

$$(9.12) \quad \sum_{i=1}^4 x_{i1} = 5, \quad \sum_{i=1}^4 x_{i2} = 9, \quad \sum_{i=1}^4 x_{i3} = 2, \quad \sum_{i=1}^4 x_{i4} = 3, \quad \sum_{i=1}^4 x_{i5} = 5.$$

De kosten van vervoer per ton zijn opgegeven in tabel 9.1. Hoewel deze in het algemeen positief zullen zijn, hebben wij ook nul en een negatieve waarde opgenomen, om te demonstreren dat het voor de methode niet noodzakelijk is dat deze coëfficiënten alle positief zijn.

Tabel 9.1

Vervoerskosten per ton

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
P_1	5	3	1	0	3
P_2	4	3	-1	2	5
P_3	8	4	2	1	3
P_4	5	7	5	4	2

Bij het oplossen van transportproblemen kan men gebruik maken van tabellen, die m rijen en n kolommen bevatten. In de rechter bovenhoek van vak (i,j) , in de i -de rij en de j -de kolom, wordt c_{ij} vermeld. De waarde van variabele x_{ij} wordt binnen een cirkel in vak (i,j) genoteerd. Bevat vak (i,j) geen cirkel, dan is $x_{ij} = 0$. Wegens (9.2) zullen we de a_i *rijtotalen* noemen. De b_j worden als *kolomtotalen* aangeduid. De a_i en b_j worden opgenomen in een $(n+1)$ -ste kolom respectievelijk $(m+1)$ -ste rij van de tabel.

Soms wordt vastgelegd, dat een zekere rij r juist één cirkel mag bevatten, bijvoorbeeld in kolom k . Dan moet gelden $x_{rk} = a_r$ en kan men zich bij het onderzoek naar de waarden van de andere variabelen beperken tot het gereduceerde probleem, dat ontstaat als men rij r verder buiten beschouwing laat en b_k vervangt door $b_k - a_r$. Wij zullen dit het *schrappen* van rij r noemen. Het schrappen van een kolom t kan op overeenkomstige wijze worden geïntroduceerd. Dan wordt bijvoorbeeld $x_{st} = b_t$ en vervangt men a_s door $a_s - b_t$.

Constructie van een beginoplossing

Een toegelaten beginoplossing wordt geconstrueerd door zo dikwijls mogelijk de volgende stap te herhalen:

kies een vak (r,k) en plaats daarin een cirkel; noteer in de cirkel $x_{rk} = \min(a_r, b_k)$ en schrap rij r of kolom k overeenkomstig de volgende regels:

- a) als $a_r < b_k$ wordt rij r geschrapd,
- b) als $a_r > b_k$ wordt kolom k geschrapd,
- c) als $a_r = b_k$ en er zijn meer dan één rij en meer dan één kolom overgebleven, wordt naar keuze rij r of kolom k geschrapd,
- d) als $a_r = b_k$ en er zijn meer dan één rij en één kolom over, wordt rij r geschrapd,
- e) als $a_r = b_k$ en er zijn één rij en meer dan één kolom over, wordt kolom k geschrapd,
- f) als $a_r = b_k$ en er zijn één rij en één kolom over, wordt naar keuze rij r of kolom k geschrapd.

Daar in elke stap juist één rij of kolom geschrapd wordt, zijn er na $(m+n-2)$ stappen slechts één rij en één kolom overgebleven. De algoritme wordt beëindigd na het uitvoeren van de $(m+n-1)$ -ste stap volgens f), omdat dan alle rijen of kolommen geschrapd zijn. Er worden dus $(m+n-1)$ cirkels geplaatst.

Omdat de randtotalen nooit negatief worden, wordt zeker een toegelaten oplossing bereikt. Later zullen wij aantonen, dat het een basisoplossing is.

De vele uit de literatuur bekende methoden voor het construeren van een beginoplossing verschillen slechts in de wijze waarop de indices r en k worden gekozen^{*)}. In de praktijk blijkt de "modified row minimum rule" tot de beste^{**)} te behoren. Volgens deze methode wordt begonnen met $r = 1$ en wordt r in elke stap met 1 opgehoogd, waarbij na $r = m$ telkens weer $r = 1$ volgt en geschrapte rijen worden overgeslagen. In de gekozen rij r wordt telkens het vak gekozen, dat in de niet geschrapte kolommen de laagste kostencoëfficiënt bevat.

Passen wij de beschreven algoritme toe op ons voorbeeld, dan vinden we eerst $x_{14} = \min(7,3) = 3$, zodat $a_1 = 4$ en $b_4 = 0$ wordt. Na het schrappen van kolom 4 volgens b) wordt de tweede stap toegepast met $r = 2$. We vinden achtereenvolgens $x_{23} = 2$, $x_{35} = 4$, $x_{45} = 1$, $x_{12} = 4$, $x_{22} = 4$, $x_{41} = 5$, $x_{42} = 1$ (zie tabel 9.2).

*) Zie bijvoorbeeld G. HADLEY, *Linear programming*, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1962), hoofdstuk 9, waar o.a. de "northwest-corner rule" en "Vogel's Approximation Method" zijn beschreven.

**) Zie F. GLOVER, D. KARNEY, D. KLINGMAN en A. NAPIER, *A computational study on start procedures, basis-change criteria, and solution algorithms for transportation problems*, Management Science, 20(1974), blz.793-813.

Tabel 9.2

De beginoplossing

						totaal
	5	3	1	0	3	
	4		3	2	5	
	8	4	2	1	3	
	5	7	5	4	2	
totaal	8	17	12	10	13	24

Enige stellingen

STELLING 9.1. Een vierkante matrix E is dan en slechts dan niet-singulier, als $\bar{E}Y = F$ voor elke F een eenduidige oplossing bezit.

BEWIJS. Als E niet-singulier is, bestaat E^{-1} , en is $Y = E^{-1}F$ een eenduidige oplossing van het stelsel $\bar{E}Y = F$. Heeft E geen inverse, dan noemen we E *singulier*. Men kan bewijzen, dat er dan een vector $\hat{Y} \neq 0$ bestaat, die voldoet aan $\bar{E}\hat{Y} = 0$. Voldoet nu $Y = Y_0$ aan het stelsel, dan voldoet $Y = Y_0 + \lambda\hat{Y}$ voor elke willekeurige waarde van λ eveneens, zodat eenduidigheid van de oplossing van $\bar{E}Y = F$ niet samen kan gaan met singulariteit van E . $\square$

STELLING 9.2. De rang^{*)} van de matrix A , gedefinieerd in (9.9), is $m+n-1$.

*) Men kan bewijzen, dat het maximale aantal lineair onafhankelijke kolomvectoren van een matrix gelijk is aan het maximale aantal lineair onafhankelijke rijvectoren. Men noemt dit aantal de rang van de matrix.

BEWIJS. Telt men de eerste m rijen van A op, dan verkrijgt men hetzelfde resultaat als wanneer men de laatste n rijen optelt. De rijen van A zijn dus afhankelijk en men mag willekeurig één van de vergelijkingen (9.2), (9.3) weglaten zonder dat daardoor de verzameling van oplossingen van dit stelsel wordt gewijzigd. De rang van A is dus zeker kleiner dan $m + n$. Het bewijs is geleverd, als we na weglating van één rij van A een niet-singuliere vierkante deelmatrix van A kunnen aangeven. Welnu, een dergelijke matrix kan bijvoorbeeld bestaan uit de vectoren $A_{11}, A_{21}, \dots, A_{m1}, A_{m2}, \dots, A_{mn}$, waaruit telkens de m -de component is verwijderd. Het vergelijkingenstelsel

$$\begin{array}{rcl}
 & x_{11} & = a_1 \\
 & x_{21} & = a_2 \\
 & \vdots & \vdots \\
 & x_{m-1,1} & = a_{m-1} \\
 (9.13) \quad x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m-1,1} + x_{m1} & = b_1 \\
 & x_{m2} & = b_2 \\
 & \vdots & \vdots \\
 & x_{mn} & = b_n,
 \end{array}$$

dat deze matrix als coëfficiëntenmatrix heeft, heeft voor iedere keuze van $a_1, \dots, a_{m-1}, b_1, \dots, b_n$ de eenduidige oplossing $x_{11} = a_1, x_{21} = a_2, \dots, x_{m-1,1} = a_{m-1}, x_{m1} = b_1 - \sum_{i=1}^{m-1} a_i, x_{m2} = b_2, \dots, x_{mn} = b_n$, zodat de matrix volgens stelling 9.1 niet singulier is. $\square$

Vanzelfsprekend hadden we in plaats van de m -de rijvergelijking een willekeurige andere vergelijking uit (9.2), (9.3) kunnen weglaten en daarbij vergelijkingenstelsels kunnen aangeven, waarvan de coëfficiëntenmatrices niet-singuliere $(m+n-1) \times (m+n-1)$ - deelmatrices van A geweest waren.

OPMERKING 9.1. Het oplossen van (9.13) komt overeen met het plaatsen van getallen in de cirkels van transporttabel 9.3, waarbij de voorwaarde, dat de som van de getallen in rij m gelijk moet zijn aan a_m , buiten beschouwing wordt gelaten. Laat men in plaats van deze voorwaarde een willekeurige andere voorwaarde weg, dan blijft volgens (9.5) de oplossing dezelfde. Uit stelling 9.2 volgt, dat dit een basisoplossing is. Deze zal in het algemeen niet voldoen aan de niet-negativiteitsrestrictie (9.4).

OPMERKING 9.2. Volgens stelling 9.2 telt een basisoplossing $(m+n-1)$ variabelen. Omdat men willekeurig één van de vergelijkingen (9.2), (9.3) mag weglaten, bestaan er $(m+n)$ mogelijkheden om hierbij een niet-singuliere basismatrix te kiezen.

Tabel 9.3

De basisoplossing, behorend bij (9.13), weergegeven in tabelvorm

						totaal
	a_1					a_1
	$\vdots$					$\vdots$
	a_{m-1}					a_{m-1}
	$b_1 - \sum_{i=1}^{m-1} a_i$	b_2		b_{n-1}	b_n	a_m
totaal	b_1	b_2		b_{n-1}	b_n	

STELLING 9.3. Een oplossing, verkregen volgens de regels voor de constructie van een beginoplossing, is een basisoplossing.

BEWIJS. We gaan uit van het stelsel (9.2), (9.3) met rechterleden, die aan (9.5) voldoen, maar overigens willekeurig gekozen zijn. Als we hierin de variabelen, die behoren bij vakken zonder cirkel, de waarde nul geven, blijft een stelsel van $(m+n)$ vergelijkingen in $(m+n-1)$ onbekenden over. Zoals we boven zagen, mogen we naar willekeur één van deze vergelijkingen weglaten, zonder dat hierdoor de verzameling van oplossingen verandert. We kiezen hiervoor de vergelijking (9.2) met het rijnummer r , waarmee de algoritme werd beëindigd. Het stelsel kan dan worden opgelost door de variabelen in dezelfde volgorde waarden toe te kunnen als in de algoritme. Deze waarden liggen telkens ondubbelzinnig vast, want, als na het invullen van x_{rk} rij r , respec-

tievelijk kolom k werd geschrapt, komen er verder geen lege cirkels meer in rij r , respectievelijk kolom k voor. Omdat na eliminatie van x_{rk} ook de nieuwe waarden van a_r en b_k eenduidig vastliggen, is voor het stelsel slechts één oplossing mogelijk. Volgens stelling 9.1 is dan de coëfficiëntenmatrix van het stelsel niet-singulier, zodat de gevonden oplossing een basisoplossing is. $\square$

Bij het bewijs van stelling 9.3 hebben we gezien, dat de waarden van de basisvariabelen in een beginoplossing bepaald kunnen worden door deze achtereenvolgens gelijk te stellen aan (gereduceerde) randtotalen. Deze eigenschap zal blijken te gelden voor elke basisoplossing.

STELLING 9.4. *Als een basisoplossing van een transportprobleem wordt weergegeven in een transporttabel, bevat deze tenminste één rij of kolom, die juist één cirkel bevat.*

BEWIJS. Stel, dat de basisoplossing is vastgelegd door p cirkels. Omdat bij elke combinatie van a_i - en b_j -waarden, die aan (9.5) voldoen, x_{ij} -waarden gevonden moeten kunnen worden, die aan (9.2), (9.3) voldoen, moeten elke rij en elke kolom tenminste één cirkel bevatten. Als dus geen enkele rij precies één cirkel zou bevatten, zou moeten gelden: $p \geq 2m$. Evenzo moet $p \geq 2n$ zijn. Hieruit volgt echter: $p \geq m+n$, hetgeen in tegenspraak is met stelling 9.2. Er moet dus tenminste één rij of kolom zijn, die juist één cirkel bevat. $\square$

STELLING 9.5. *De x_{ij} -waarden van een basisoplossing hebben de gedaante $\{a_i - \{b_j$ of $\{b_j - \{a_i$, waarin $\{a_i$ en $\{b_j$ partiële sommen voorstellen van de getallen a_i resp. b_j .*

BEWIJS. Een basisoplossing correspondeert met een verzameling cirkels in een transporttabel. Volgens stelling 9.4 kan men één cirkel vinden, die als enige in zijn rij of kolom voorkomt. Nadat in deze cirkel een rijtotaal respectievelijk kolomtotaal is ingevuld, kan de betreffende rij, respectievelijk kolom worden geschrapt. Vervolgens kan deze procedure voor het gereduceerde probleem worden herhaald totdat alle rijen of kolommen zijn geschrapt. Alle x_{ij} -waarden zijn dus gelijk aan randtotalen van al dan niet gereduceerde transportproblemen. Het bewijs is dan geleverd, wanneer is aangetoond, dat de rijtotalen van een (gereduceerd) transportprobleem de gedaante $\{a_i - \{b_j$ hebben en de kolomtotalen geschreven kunnen worden in de vorm $\{b_j - \{a_i$. Dit moet echter wel het geval zijn, daar in het oorspronke-

lijke probleem de randtotalen deze gedaante hebben en deze vorm behouden blijft, als een rij of kolom wordt geschrapt. $\square$

OPMERKING 9.3. Geheeltalligheidseigenschap. Wanneer de a_i en b_j gehele getallen zijn, volgt uit stelling 9.5, dat in een basisoplossing alle x_{ij} gehele waarden hebben.

In een laatste stelling zullen wij bewijzen, dat de basismatrices van het transportprobleem driehoeksmatrices zijn.

DEFINITIE 9.1. Een vierkante matrix is een *driehoeksmatrix*, als na eventuele hernummering van rijen en kolommen alle elementen boven de diagonaal nul zijn.

Een stelsel vergelijkingen met een niet-singuliere driehoeksmatrix als coëfficiëntenmatrix is zeer gemakkelijk op te lossen. Beschouw het stelsel

$$\begin{array}{rcl} e_{11} y_1 & & = d_1 \\ e_{21} y_1 + e_{22} y_2 & & = d_2 \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ e_{k1} y_1 + e_{k2} y_2 + \dots + e_{kk} y_k & = & d_k, \end{array}$$

waarin $e_{ii} \neq 0$ ($i = 1, \dots, k$).

Substitutie van de waarde $y_1 = \frac{d_1}{e_{11}}$, die uit de eerste vergelijking volgt, in de andere vergelijkingen levert een stelsel van dezelfde vorm op, maar dan met één vergelijking en één onbekende minder. Men behoeft dus slechts k maal één vergelijking in één onbekende op te lossen om de oplossing van het stelsel te berekenen.

Een voorbeeld van een stelsel vergelijkingen met een niet-singuliere driehoeksmatrix als coëfficiëntenmatrix is (9.13).

STELLING 9.6. *Elke basismatrix van een transportprobleem is een driehoeksmatrix.*

BEWIJS. We bewijzen, dat ook indien men één van de vergelijkingen (9.2), (9.3) weglaat, de waarden van de basisvariabelen te berekenen zijn door

$(n+m-1)$ maal één vergelijking in één onbekende op te lossen en telkens de gevonden waarde te substitueren.

Het maakt voor het bewijs niet uit, welke vergelijking is weggelaten. We nemen aan, dat het de vergelijking voor kolom k is. We beschouwen de transporttabel, waarin de basisoplossing is vastgelegd door $p = m+n-1$ cirkels, en bewijzen uit het ongerijmde, dat er tenminste één rij of één kolom met index $\neq k$ te vinden is, die één cirkel bevat. Stel, dat elke rij tenminste twee cirkels bevatte. Dan zou gelden: $p \geq 2m$. Als ook elke kolom met index $\neq k$ twee cirkels bevatte, zou eveneens moeten gelden: $p \geq 2(n-1) + 1 = 2n - 1$. Immers ook kolom k moet tenminste één cirkel bevatten. Uit deze ongelijkheden volgt: $p \geq m+n-\frac{1}{2}$, hetgeen in tegenspraak is met $p = m+n-1$. Er is dus tenminste één rij of één kolom met index $\neq k$, die juist één cirkel bevat. Op dezelfde wijze als bij het bewijs van stelling 9.5 kan de desbetreffende rij of kolom worden geschrapt, waarna deze stap $(m+n-2)$ maal kan worden herhaald. Alle basisvariabelen hebben dan een waarde gekregen na het oplossen van één vergelijking in één onbekende. $\square$

De iteratieprocedure van de verdelingsmethode

Evenals bij de gewone simplexmethode wordt de optimale oplossing in een eindig aantal iteraties bereikt. Als z_{ij} op overeenkomstige wijze wordt gedefinieerd als z_j in §4 van deel 6a van deze leergang, kan de algoritme als volgt worden beschreven:

- 1) bepaal een eerste toegelaten basisoplossing;
- 2) bereken $c_{ij} - z_{ij}$;
- 3) zoek een vak (r,k) waarvoor $c_{rk} - z_{rk} < 0$ is. Is $c_{ij} - z_{ij} \geq 0$ voor alle (i,j) , dan is de bereikte basisoplossing optimaal en wordt de algoritme beëindigd; is dit niet het geval, ga dan verder volgens 4);
- 4) bepaal, welke variabele x_{st} uit de verzameling van basisvariabelen verwijderd moet worden, als x_{rk} er in opgenomen wordt, en voer deze verandering uit;
- 5) bereken de waarden van de variabelen in de nieuwe basisoplossing en ga verder volgens 2).

De berekening van $c_{ij} - z_{ij}$

Als men één niet-basisvariabele x_{rk} laat toenemen met θ eenheden, is het effect op de waarden van de basisvariabelen hetzelfde als wanneer a_r en b_k beide met θ eenheden worden verminderd. De veranderingen Δx_{ij} in de x_{ij} -waarden hebben dan volgens stelling 9.5 de gedaante $\Sigma \Delta a_i - \Sigma \Delta b_j$, of

$\Sigma \Delta b_j - \Sigma \Delta a_i$, met

$$\Delta a_i = \begin{cases} 0 & (i \neq r) \\ -\theta & (i = r) \end{cases}$$

$$\Delta b_j = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ -\theta & (j = k) \end{cases},$$

zodat steeds geldt: $\Delta x_{ij} = 0, \theta$ of $-\theta$. We kunnen dus de vakken van de transporttabel indelen in drie verzamelingen: de verzameling K^0 van vakken, waarin toename van x_{rk} geen verandering van de x-waarde teweegbrengt, de verzameling K^+ van vakken, waarin een toename en de verzameling K^- van vakken, waarin een afname van de x-waarde plaatsvindt.

Als illustratie laten wij in tabel 9.2 variabele x_{34} toenemen met θ eenheden. Het resultaat is weergegeven in tabel 9.4. Er geldt: $K^- = \{(1,4), (4,2), (3,5)\}$ en $K^+ = \{(3,4), (1,2), (4,5)\}$. De kosten van de oplossing in tabel 9.4 zijn ten opzichte van de kosten van de beginoplossing toegenomen met $\theta(c_{34} - c_{35} + c_{45} - c_{42} + c_{12} - c_{14}) = -4\theta$. De toename van de kosten per eenheid is gelijk aan de kosten per eenheid van de niet-basisvariabele x_{34} , verminderd met de gezamenlijke kosten per eenheid van de routes uit de basisoplossing, die P_3Q_4 kunnen vervangen, dus $c_{35} - c_{45} + c_{42} - c_{12} + c_{14}$. De laatstgenoemde kosten zijn juist gelijk aan het getal z_{34} , dat men bij toepassing van de gewone simplexmethode gevonden zou hebben. Interpretatie van z_{ij} analoog aan de interpretatie van z_j , gegeven op blz. 129 en 130 van deel 6a, leidt onmiddellijk tot deze gevolgtrekking. Er geldt dus

$$c_{34} - z_{34} = c_{34} - c_{35} + c_{45} - c_{42} + c_{12} - c_{14}.$$

In tabel 9.4 kan men $c_{34} - z_{34}$ vinden door beurtelings optellen en aftrekken van de c_{ij} , die behoren bij de "hoekpunten" van de gesloten "weg", die in de tabel met een stippellijn is aangegeven. Op dezelfde wijze kan men bij elke niet-basisvariabele $x_{i_0j_0}$ juist één dergelijke weg construeren. Uitgaande van vak (i_0, j_0) loopt deze eerst horizontaal naar een vak (i_0, j_1) , vervolgens vertikaal naar een vak (i_1, j_1) enzovoort. Tenslotte gaat de weg horizontaal van vak (i_p, j_p) naar vak (i_p, j_0) en dan vertikaal naar vak (i_0, j_0) terug. Alle hoekpunten behalve (i_0, j_0) moeten hierbij corresponderen met basisvariabelen.

Tabel 9.4.

Effect van de toename van de waarde van x_{34} tot 0

						totaal
		5	3	1	0	3
		$4+\theta$		$3-\theta$		7
		4	3	-1	2	5
		4	2			6
		8	4	2	1	3
				θ	$4-\theta$	4
	5	$1-\theta$	7	5	4	2
					$1+\theta$	7
totaal	5	9	2	3	5	24

Men vindt dan

$$(9.14) \quad c_{i_0 j_0} - z_{i_0 j_0} = c_{i_0 j_0} - c_{i_0 j_1} + c_{i_1 j_1} - c_{i_1 j_2} + \dots + c_{i_p j_p} - c_{i_p j_0}.$$

Hoewel men op de beschreven wijze bij elk van de $(m-1)(n-1)$ niet-basisvariabelen de bijbehorende weg kan opzoeken en daaruit de $c_{ij} - z_{ij}$ kan afleiden, kan men het rekenwerk aanzienlijk vereenvoudigen door het toekennen van getallen u_i aan de havens P_i ($i = 1, \dots, m$) en v_j aan de havens Q_j ($j = 1, \dots, n$). Deze getallen worden zodanig gekozen, dat geldt:

$$(9.15) \quad u_i + v_j = c_{ij} \text{ als } x_{ij} \text{ basisvariabele is.}$$

Dit is altijd mogelijk, zoals wij verderop zullen bewijzen. Geeft men één van de variabelen u_i en v_j een willekeurige waarde, dan liggen de waarden van de overige variabelen vast. Het voordeel van het werken met de u_i en v_j blijkt, als (9.15) wordt gesubstitueerd in (9.14):

$$\begin{aligned}
 (9.16) \quad c_{i_0 j_0} - z_{i_0 j_0} &= c_{i_0} - u_{i_0} - v_{j_1} + u_{i_1} + v_{j_1} - u_{i_1} - v_{j_2} \dots \\
 &\dots + u_{i_p} + v_{j_p} - u_{i_p} - v_{j_0} = \\
 &= c_{i_0 j_0} - u_{i_0} - v_{j_0}.
 \end{aligned}$$

Dus geldt:

$$(9.17) \quad z_{ij} = u_i + v_j \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

OPMERKING 9.4. De waarde, die bij het oplossen van (9.15) aan één van de u_i of v_j wordt toegekend, beïnvloedt de z_{ij} -waarden niet. Stel namelijk, dat de waarde van één van de u_i met g wordt vermeerderd. Men kan dan een nieuwe oplossing van (9.15) verkrijgen door alle u_i met g te vermeerderen en alle v_j met g te verminderen. Uit (9.17) blijkt, dat de z_{ij} dan gelijk blijven. Tevens volgt hieruit, dat het ook onverschillig is, welke u_i of v_j men als eerste een waarde toekent.

De aard van de getallen u_i en v_j wordt duidelijk, als men de z_{ij} definieert overeenkomstig de definitie van z_j volgens de formules (4.10) en (4.6) uit deel 6a van deze leergang. We laten één van de restricties (9.2), (9.3) weg, bijvoorbeeld $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$. Bij een variabele x_{ij} behoort dan een vector $\hat{A}_{ij}$ met $m+n-1$ componenten, die men verkrijgt door de eerste component van A_{ij} weg te laten. Verder definiëren we de vector C_b weer als de vector van c_{ij} van de basisvariabelen. Dan is

$$(9.18) \quad z_{ij} = C_b' B^{-1} \hat{A}_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

We definiëren los van de in het voorgaande gebruikte definities voor u_i en v_j de vectoren $U' = (u_1, \dots, u_m)$, $V' = (v_1, \dots, v_n)$, $\hat{U}' = (u_2, \dots, u_m)$, stellen $u_1 = 0$ en

$$(9.19) \quad (\hat{U}', V') = C_b' B^{-1}.$$

Schrijven we voor (9.19)

$$(9.20) \quad B' \begin{pmatrix} \hat{U}' \\ V' \end{pmatrix} = C_b',$$

dan volgt uit het feit, dat B een niet-singuliere driehoeksmatrix is met coëfficiënten 0 en 1, dat de waarden van $u_2, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ achtereenvolgens door aftrekkingen kunnen worden verkregen. Wegens $u_1 = 0$ volgt uit (9.18) en (9.19):

$$z_{ij} = (\hat{U}', \hat{V}') \hat{A}_{ij} = (U', V') A_{ij} = u_i + v_j \quad \begin{matrix} (i = 1, \dots, m; \\ j = 1, \dots, n). \end{matrix}$$

De nieuwe definities van u_i en v_j zijn dus geheel in overeenstemming met (9.15), terwijl ook de definitie van z_{ij} volgens (9.17) consistent is met de in §4 gegeven definitie van z_j .

OPMERKING 9.5. Uit het bovenstaande en uit §4 volgt, dat u_i en v_j ook opgevat kunnen worden als variabelen van het duale probleem van (9.1) t/m (9.4). Dit luidt:

maximaliseer

$$(9.21) \quad \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j$$

onder de voorwaarden

$$(9.22) \quad u_i + v_j \leq c_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

(9.15) geeft de "complementary slackness" eigenschap, vermeld in stelling 7.4 van deel 6a, weer.

We zullen nu voorbeeld 9.1 verder oplossen. Daarbij kiezen we in stap 2 het vak (r, k) , waarvoor geldt $c_{rk} - z_{rk} = \min_{i,j} (c_{ij} - z_{ij})$.

Met behulp van (9.15) en (9.17) kunnen de $(c_{ij} - z_{ij})$ -waarden in tabel 9.2 worden ingevuld. Het resultaat is tabel 9.5. De gebruikte u_i en v_j zijn in de bovenste rij en de voorste kolom geschreven. De berekening hiervan verloopt als volgt. Men stelt $u_1 = 0$. Omdat x_{12} en x_{14} basisvariabelen zijn, moet $u_1 + v_2 = c_{12} = 3$ zijn, zodat $v_2 = 3$ is, en volgt uit $u_1 + v_4 = 0$, dat $v_4 = 0$ is. Uitgaande van $v_2 = 3$ kunnen de u_i , behorende bij de cirkels in kolom 2 bepaald worden: $u_2 + v_2 = 3$ en $u_4 + v_2 = 7$, dus $u_2 = 0$ en $u_4 = 4$. Op dezelfde wijze vindt men daarna $v_3 = -1$, $v_1 = 1$, $v_5 = -2$ en tenslotte $u_3 = 5$. In de bij de niet-basisvariabelen behorende vakken is in tabel 9.5 overal $c_{ij} - z_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ ingevuld. Het kleinste van deze getallen is negatief en staat in de vakken (3,2) en (3,4). We nemen bijvoorbeeld x_{32} in de basis-

Tabel 9.5

Is een betere oplossing mogelijk?

$u_i \backslash v_j$	1	3	-1	0	-2	totaal
0	4	5 (4) 3	2	1 (3) 0	3 5	7
0	3	4 (4) 3	(2) -1	2	2 7	6
5	2	8 -4	4 -2	2 -4	1 (4) 3	4
4	(5)	5 (1)	7 -2	5 -0	4 (1) 2	7
totaal	5	9	2	3	5	24

oplossing op en geven dit aan door het plaatsen van een rechthoekje om het getal -4 in vak (3,2).

Overgang op een nieuwe basisoplossing

Is

$$(9.23) \quad c_{rk} - z_{rk} = \min_{i,j} (c_{ij} - z_{ij}) < 0,$$

dan wordt overeenkomstig de gewone simplexprocedure het vervoer over route (r,k) zo groot gemaakt, als onder de gegeven bijvoorwaarden mogelijk is. Zoals boven is gebleken, moet dit geschieden door veranderingen aan te brengen in de getallen, die behoren bij de hoekpunten van de bij (r,k) behorende gesloten weg. De vakken, die de hoekpunten van deze weg bevatten, vormen de verzamelingen K^+ en K^- . De variabele x_{st} , die uit de basisoplossing moet worden verwijderd, moet voldoen aan

$$(9.24) \quad \bar{\theta} = x_{st} = \min_{(i,j) \in K^-} x_{ij}.$$

De nieuwe basisoplossing verkrijgt men door $\bar{\theta}$ op te tellen bij de x_{ij} -waarden in de vakken $(i,j) \in K^+$ en $\bar{\theta}$ af te trekken in de vakken $(i,j) \in K^-$.

Omdat het vinden van een weg in een kleine transporttabel meestal weinig moeite kost, hebben wij hieraan tot dusver weinig aandacht besteed. Bij grotere problemen wordt dit echter minder eenvoudig. Men kan dan zijn toevlucht nemen tot een procédé, bestaande uit de volgende stappen:

- 1) plaats een cirkel in het vak van de in de basisoplossing op te nemen variabele;
- 2) schrap in de tabel alle rijen en kolommen, die slechts één cirkel bevatten;
- 3) herhaal stap 2 zo lang mogelijk met het overgebleven gedeelte van de tabel; het niet geschrapte deel van de tabel bevat dan als enige cirkels de hoekpunten van de gezochte weg.

Na het bovenstaande is de oplossing van het voorbeeld gemakkelijk uit te rekenen. In tabel 9.5 is $c_{32} - z_{32} = -4$ in een rechthoekje geplaatst. De bijbehorende weg is met stippellijnen aangegeven. x_{32} kan toenemen tot $\min(x_{35}, x_{42}) = \min(4, 1) = \bar{\theta} = 1$. Door x_{32} en x_{45} te vermeerderen met 1 en x_{35} en x_{42} met 1 te verminderen, ontstaat de basisoplossing, die in tabel 9.6 weergegeven is. x_{42} is hierin overeenkomstig (9.24) geen basisvariabele meer. De totale transportkosten zijn door de overgang op de nieuwe basisoplossing gedaald van 68 tot $68 + \bar{\theta}(c_{rk} - z_{rk}) = 68 + 1 \cdot (-4) = 64$.

Men kan nu opnieuw de waarden u_i en v_j bepalen, vervolgens de getallen $c_{ij} - z_{ij}$ berekenen, nagaan of één van deze verschillen negatief is en zo ja, het nieuwe schema van verzending construeren. De tabellen 9.6 en 9.7 bevatten de gegevens van de volgende stappen. De met rechthoekjes aangegeven hokjes corresponderen hierin met de nieuw op te nemen routes. In tabel 9.7 zijn alle $(c_{ij} - z_{ij})$ -waarden niet-negatief. De weergegeven basisoplossing is optimaal.

Tabel 9.6De eerste verbeterde oplossing

$u_i \backslash v_j$	5	3	-1	0	2	totaal
0	0 5	(4) 3	2 1	(3) 0	1 3	7
0	(-1) 4	(4) 3	(2) -1	2 2	3 5	6
1	2 8	(1) 4	2 2	0 1	(3) 3	4
0	(5) 5	4 7	6 5	4 4	(2) 2	7
totaal	5	9	2	3	5	24

Tabel 9.7De tweede verbeterde oplossing

$u_i \backslash v_j$	4	3	-1	0	1	totaal
0	1 5	(4) 3	2 1	(3) 0	2 3	7
0	(3) 4	(1) 3	(2) -1	2 2	4 5	6
1	3 8	(4) 4	2 2	0 1	1 3	4
1	(2) 5	3 7	5 5	3 4	(5) 2	7
totaal	5	9	2	3	5	24

Alternatieve optima

Tabel 9.7 leert ons niet alleen dat er geen betere oplossing bestaat, doch ook dat er wel een andere, eveneens optimale oplossing is. Immers de nul in het vakje (3,4) geeft aan, dat het inschakelen van route P_3Q_4 geen wijziging in de totale kosten zal brengen. Dit alternatieve optimale programma is vermeld in tabel 9.8; de verschillen $c_{ij} - z_{ij}$ blijven dezelfde.

Tabel 9.8

Een andere optimale oplossing

$v_j \backslash u_i$	4	3	-1	0	1	totaal
0	1 5	(7) 3	2 1	0 0	2 3	7
0	(3) 4	(1) 3	(2) -1	2 2	4 5	6
1	3 8	(1) 4	2 2	(3) 1	1 3	4
1	(2) 5	3 7	5 5	3 4	(5) 2	7
totaal	5	9	2	3	5	24

Daar tabel 9.7 alleen een nul bevat in vak (3,4) bestaan er verder geen optimale oplossingen, die niet verkregen kunnen worden als lineaire combinatie van de in de tabellen 9.7 en 9.8 vermelde oplossingen. Geven wij deze aan met x'_{ij} , resp. x''_{ij} , dan kan men alle optimale oplossingen van dit probleem voorstellen door

$$x_{ij} = \lambda x'_{ij} + \mu x''_{ij},$$

waarin

$$\lambda \geq 0, \quad \mu \geq 0 \quad \text{en} \quad \lambda + \mu = 1.$$

Voor $\lambda = \frac{2}{3}$, $\mu = \frac{1}{3}$ is de bijbehorende optimale oplossing opgenomen in tabel 9.9. Evenals de oplossing, die men verkrijgt met $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{2}{3}$, is deze oplossing geheeltallig. Voor andere waarden van λ en μ geldt deze eigenschap niet.

Tabel 9.9

Nog een optimale oplossing

$u_i \backslash v_j$						totaal
	5	3	1	0	3	7
	(5)		(2)			
	4	3	-1	2	5	6
	(3)	(1)	(2)			
	8	4	2	1	3	4
		(3)		(1)		
	5	7	5	4	2	7
	(2)				(5)	
totaal	5	9	2	3	5	24

Bevat een tabel van een optimale oplossing meer dan één vak met $c_{ij} - z_{ij} = 0$, dan kan men alternatieve optima verkrijgen als lineaire combinaties van meer dan twee optimale basisoplossingen.

Ontaardingen

Een basisoplossing heet volgens §4 ontaard, als een basisvariabele de waarde nul heeft. Wij wezen in die paragraaf reeds op de theoretische mogelijkheid van "cycling": eenzelfde rij van niet-optimale basisoplossingen kan oneindig vaak cyclisch worden doorlopen zonder dat de waarde van de criteriumfunctie verandert. Terwijl er echter voor het algemene lineaire programmeringsprobleem enkele voorbeelden zijn geconstrueerd, die tot cycling kunnen leiden,

is er geen enkel transportprobleem bekend, dat tot cycling aanleiding kan geven. Men ontmoet bij de toepassing van de verdelingsmethode dan ook geen moeilijkheden, mits men bij de constructie van de beginoplossing nooit een rij en een kolom tegelijk schrapt, en in de latere stappen steeds één variabele x_{st} met $(s,t) \in K^-$ uit de basisoplossing verwijdt.

Verboden routes

De tot dusver in deze paragraaf besproken problemen waren zodanig geformuleerd, dat vervoer van elke opslaghaven naar elk van de bestemmingshavens mogelijk was. Dikwijls is dit echter niet het geval, doch is een verzameling N gegeven van (i,j) met de eigenschap, dat er geen route van P_i naar Q_j bestaat, of dat deze route niet gebruikt kan worden. Ook deze problemen kan men oplossen door middel van de verdelingsmethode. Om tot de standaardformulering (9.1) t/m (9.4) te kunnen komen, voert men ook voor $(i,j) \in N$ variabelen x_{ij} in, doch kent daaraan zulke hoge kosten $c_{ij} = M$ toe, dat voor de optimale oplossing van (9.1) t/m (9.4) geldt, dat $x_{ij} = 0$ is voor alle $(i,j) \in N$, wanneer het oorspronkelijke probleem een oplossing bezit. M is zeker voldoende groot, als geldt:

$$(9.25) \quad M \geq (m+n) \max_{(i,j) \notin N} |c_{ij}|.$$

Stel namelijk, dat in de optimale oplossing een basisvariabele x_{ij} voorkwam met $(i,j) \in N$, hoewel er een basisoplossing bestond met $(i,j) \notin N$ voor alle basisvariabelen x_{ij} . Dan kon men de verdelingsmethode toepassen met de laatstgenoemde oplossing als startoplossing en zou men eindigen bij de eerstgenoemde oplossing. Dit is echter onmogelijk, omdat nooit een variabele x_{ij} met $(i,j) \in N$ in de basis zou worden opgenomen wegens $c_{ij} + z_{ij} > 0$.

Wij zullen nu de oplossing berekenen van voorbeeld 1.4, dat wij hier herhalen als voorbeeld 9.2.

VOORBEELD 9.2. Keuze van een vestigingsplaats. Een industrie wil een nieuwe fabriek bouwen voor onderdelen, die reeds op twee plaatsen gemaakt worden. Er is keuze tussen drie vestigingsplaatsen; een keuze die men wil laten bepalen door de transportkosten van de onderdelen naar de fabrieken waar ze nodig zijn.

Laten er van de onderdelen reeds 1000 exemplaren per maand gemaakt worden in A en 2000 in B, en laat de produktie gepland voor de nieuwe fabriek 1500 per maand bedragen. Van deze onderdelen zijn er in de fabriek in E

2000 en in die in F 2500 per maand nodig. De nieuwe fabriek kan gevestigd worden in K, L of M. De kosten van vervoer per eenheid tussen de (eventuele) produktieplaatsen A, B, K, L en M en de fabrieken in E en F zijn opgegeven in tabel 9.10.

Tabel 9.10

Vervoerskosten per eenheid tussen produktieplaatsen en fabrieken

	A	B	K	L	M
E	5	2	2	1	3
F	2	1	3	4	2

Wordt de fabriek in K gevestigd, dan kunnen de minimale transportkosten van de fabrieken in A, B en K naar de fabrieken in E en F berekend worden. Hetzelfde kan men doen voor de gevallen waarin de vestiging in L respectievelijk in M plaatsvindt. Het laagste van de drie minima bepaalt de gunstigste plaats van vestiging voor de nieuwe fabriek.

Als de nieuwe fabriek gevestigd wordt in K, volgt het optimale vervoersschema uit de oplossing van het transportprobleem, waarvan tabel 9.11 de beginoplossing weergeeft. Bij de constructie van deze oplossing werd begonnen met de toewijzing van 20 eenheden van 100 onderdelen uit fabriek B aan E. Geven we de hoeveelheid, door fabriek i betrokken van fabriek j , weer door x_{ij} ($i = E, F$; $j = A, B, K, L, M$), dan kunnen we schrijven $x_{EB} = \min(20, 20) = 20$. Schrappt men kolom B, dan vindt men achtereenvolgens $x_{FA} = 10$, $x_{EK} = 0$, $x_{FK} = 15$. Uit de $(c_{ij} - z_{ij})$ -waarden in tabel 9.11 blijkt, dat x_{FB} in de basisoplossing moet worden opgenomen. Tabel 9.12 geeft de optimale oplossing weer. De kosten hiervan bedragen 7500.

Tabel 9.11

Beginoplossing bij vestiging in plaats K

$u_i \backslash v_j$	1	2	2	totaal	
0	4 5	20 2	0 2	20	(E)
1	10 2	-2 1	15 3	25	(F)
totaal	10	20	15	45	
	(A)	(B)	(K)		

Tabel 9.12

Optimale oplossing bij vestiging in plaats K

$u_i \backslash v_j$	3	2	2	totaal	
0	2 5	5 2	15 2	20	(E)
-1	10 2	15 1	2 3	25	(F)
totaal	10	20	15	45	
	(A)	(B)	(K)		

Had men bij de constructie van de beginoplossing na de toewijzing $x_{EB} = 20$ rij E geschrapt in plaats van kolom B, dan had men achtereenvolgens gevonden: $x_{FB} = 0$, $x_{FA} = 10$, $x_{FK} = 15$.

De minimale transportkosten bij vestiging van de nieuwe fabriek in L en in M worden op overeenkomstige wijze gevonden. De tabellen 9.13 en 9.14 geven de optimale oplossingen weer. De kosten bedragen 6000 respectievelijk 9000, zodat onze conclusie kan zijn, dat L de optimale vestigingsplaats voor de nieuwe fabriek is.

Tabel 9.13

Optimale oplossing bij vestiging in plaats L

$u_i \backslash v_j$	3	2	1	totaal	
0	2 5	5 2	15 1	20	(E)
-1	10 2	15 1	4 4	25	(F)
totaal	10	20	15	45	
	(A)	(B)	(L)		

Tabel 9.14

Optimale oplossing bij vestiging in plaats M

$u_i \backslash v_j$	3	2	3	totaal	
0	2 5	5 2	15 3	20	(E)
-1	10 2	15 1	0 2	25	(F)
totaal	10	20	15	45	
	(A)	(B)	(M)		

Toewijzingsproblemen

Onder toewijzingsproblemen verstaat men problemen, waarin gevraagd wordt het minimum te bepalen van

$$(9.26) \quad y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

onder de voorwaarden

$$(9.27) \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$(9.28) \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$(9.29) \quad x_{ij} = 0 \text{ of } 1 \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n).$$

Men mag bij deze problemen (9.29) vervangen door

$$(9.30) \quad x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n).$$

Immers, daar de x_{ij} -waarden in de optimale (basis-) oplossing van (9.26), (9.27), (9.28), (9.30) geheel zijn, voldoen zij steeds automatisch aan (9.29). Het gewijzigde probleem is een speciale vorm van het transportprobleem en kan dus door middel van de verdelingsmethode worden opgelost.

Helaas heeft het echter de voor de toepassing van deze methode nadelige eigenschap zeer sterk ontaard te zijn. Dit bezwaar speelt geen rol in de speciaal voor dit probleem door H. KUHN ontwikkelde zogenaamde *Hongaarse methode*^{*)}. Er bestaan echter efficiëntere methoden^{**)}. Wij zullen deze niet behandelen.

Een voorbeeld van een toewijzingsprobleem is

VOORBEELD 9.3. Een toewijzingsprobleem. In een bedrijf wil men n personen aanstellen in n verschillende functies. Men beschikt over getallen g_{ij} , die telkens de verwachte geschiktheid van persoon i voor functie j weergeven. Deze getallen kunnen bijvoorbeeld afgeleid zijn uit de resultaten van een aantal tests. Wij nemen aan, dat iemands geschiktheid voor een bepaalde functie niet beïnvloed wordt door de aanstellingen in de andere functies. Men wil nu de functies op zodanige wijze aan de kandidaten toewijzen, dat hun talenten zoveel mogelijk aan het bedrijf ten goede komen. Hiertoe kan men de som van de geschiktheden van de personen voor de functies, waarin zij aangesteld worden, maximaliseren. Definieert men variabelen x_{ij} , die voldoen aan

$$(9.31) \quad x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{als } i \text{ niet wordt aangesteld in functie } j \\ 1 & \text{als } i \text{ wel wordt aangesteld in functie } j, \end{cases}$$

en stelt men $c_{ij} = -g_{ij}$, dan kan de wiskundige formulering worden weergegeven door (9.26), (9.27), (9.28), (9.30). Betrekking (9.27) geeft dan weer, dat aan elke kandidaat juist één functie kan worden toegewezen, terwijl volgens (9.28) elke functie slechts door één persoon mag worden uitgeoefend.

Transportproblemen met bovengrenzen

Dikwijls mogen de waarden, die de variabelen in een transportprobleem aannemen, bepaalde bovengrenzen niet overschrijden. De algemene formulering van een dergelijk probleem wordt:

*) Zie bijvoorbeeld W.A. SPIVEY & R.M. THRALL, *Linear Optimization*, Holt Rinehart and Winston, New York (1970), blz. 220-223.

**) Zie B. DORHOUT, *Het lineaire toewijzingsprobleem: vergelijking van algoritmen*, rapport BN 21, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1973).

minimaliseer

$$(9.1) \quad y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

onder de voorwaarden

$$(9.2) \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$(9.3) \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$(9.4) \quad x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

$$(9.32) \quad x_{ij} \leq e_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n),$$

waarbij is aangenomen, dat de a_i en b_j niet-negatieve getallen zijn, die aan (9.5) voldoen, en de getallen e_{ij} positief zijn. (9.32) kan worden vervangen door

$$(9.33) \quad x_{ij} + t_{ij} = e_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

$$(9.34) \quad t_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

Voor het oplossen van dit probleem behoeven de regels van de verdelingsmethode slechts weinig te worden uitgebreid.

Omdat het probleem $(m+n-1+mn)$ lineair onafhankelijke voorwaarden bezit, telt een basisoplossing $(m+n-1+mn)$ basisvariabelen. We nemen verder aan, dat het probleem geen ontaarde oplossingen bezit. Stel nu, dat in een basisoplossing p variabelen x_{ij} voldoen aan $0 < x_{ij} < e_{ij}$. Dan is het aantal basisvariabelen $mn + p$, namelijk voor elke (i,j) tenminste x_{ij} of t_{ij} , en in p gevallen daarvan zowel x_{ij} als t_{ij} . Uit $mn + p = mn + m + n - 1$ volgt, dat $p = m + n - 1$. Bij het oplossen van het probleem zullen wij gebruik maken van tabellen, die evenals de tabellen voor het standaardtransportprobleem mn vakken bevatten, die met de variabelen x_{ij} corresponderen. We plaatsen nu $m + n - 1$ cirkels in de vakken, waarvoor $0 < x_{ij} < e_{ij}$. Voor een basisoplossing moet dan gelden, dat de x_{ij} -waarden in de cirkels onduidelijk vastliggen, als van de overige vakken (i,j) bekend is, of $x_{ij} = 0$ dan wel $x_{ij} = e_{ij}$ is. Een redenering, analoog aan die in het bewijs

van stelling 9.6 leert ons, dat een stelsel van $(m+n-1)$ vergelijkingen in de variabelen, die met de cirkels corresponderen, een driehoeksmatrix als coëfficiëntenmatrix bezit.

We beschouwen het duale probleem van (9.1), ..., (9.4), (9.32) om te kunnen afleiden, hoe de $(c_{ij} - z_{ij})$ -waarden moeten worden berekend en hoe kan worden vastgesteld, of een basisoplossing optimaal is. Het duale probleem luidt: maximaliseer

$$(9.35) \quad \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n e_{ij} w_{ij},$$

onder de voorwaarden

$$(9.36) \quad u_i + v_j - w_{ij} \leq c_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

$$(9.37) \quad w_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

Bij een basisoplossing van (9.1), ..., (9.4), (9.32) kunnen de waarden van de duale variabelen worden berekend met behulp van de complementary slackness eigenschap (zie §7):

$$(9.38) \quad x_{ij} < e_{ij} \Rightarrow w_{ij} = 0 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

$$(9.39) \quad x_{ij} > 0 \Rightarrow u_i + v_j - w_{ij} = c_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n),$$

zodat

$$(9.40) \quad u_i + v_j = c_{ij}, \text{ als } 0 < x_{ij} < e_{ij}.$$

De getallen u_i en v_j kunnen dus op dezelfde wijze worden berekend als bij het standaardprobleem. Een basisoplossing is optimaal, als er een oplossing van het duale probleem gevonden kan worden, die aan (9.36) t/m (9.39) voldoet. Hieruit volgt, dat dan moet gelden:

$$(9.41) \quad c_{ij} - u_i - v_j \geq 0, \text{ als } x_{ij} = 0 < e_{ij}$$

$$(9.42) \quad c_{ij} - u_i - v_j \leq 0, \text{ als } x_{ij} = e_{ij} > 0.$$

Is $c_{ij} - u_i - v_j < 0$ en $x_{ij} = 0$ of $c_{ij} - u_i - v_j > 0$ en $x_{ij} = e_{ij}$ voor één of meer (i, j) , dan kan de waarde van de criteriumfunctie worden verlaagd, door

de waarde van x_{ij} te laten toenemen respectievelijk afnemen. Men neemt hiervoor die variabele x_{rk} , waarvoor de afname van de criteriumfunctie per eenheid maximaal is.

De toename respectievelijk afname van x_{rk} bij de overgang van een toegelaten basisoplossing naar een volgende toegelaten basisoplossing wordt begrensd, doordat x_{rk} of één van de basisvariabelen zijn bovengrens of de waarde nul bereikt. Evenals bij het standaardtransportprobleem kunnen we een verzameling K^- onderscheiden van vakken met x_{ij} -waarden, die afnemen en een verzameling K^+ van vakken met x_{ij} -waarden, die toenemen tengevolge van de verandering van de waarde van x_{rk} . Om te bepalen, welke variabele uit de basisoplossing moet worden verwijderd, berekenen we

$$(9.43) \quad \theta^- = \min_{(i,j) \in K^-} x_{ij} = x_{s_1 t_1}$$

$$(9.44) \quad \theta^+ = \min_{(i,j) \in K^+} (e_{ij} - x_{ij}) = e_{s_2 t_2} - x_{s_2 t_2}$$

en

$$(9.45) \quad \bar{\theta} = \min(\theta^-, \theta^+).$$

Is $\bar{\theta} = e_{rk}$, dan wordt er geen verandering gebracht in de verzameling van de cirkels. x_{rk} wordt op zijn boven- respectievelijk ondergrens gezet. De nieuwe x_{ij} -waarden worden in de cirkels geschreven. Voor $\bar{\theta} = \theta^-$ wordt de cirkel uit vak (s_1, t_1) verwijderd, voor $\bar{\theta} = \theta^+$ de cirkel uit (s_2, t_2) . In deze gevallen wordt een cirkel in vak (r, k) geplaatst en worden de x_{ij} -waarden op de gebruikelijke wijze gewijzigd.

De beschreven iteratie wordt herhaald totdat een optimale oplossing is bereikt.

Om de beschreven algoritme te kunnen toepassen moet men over een eerste toegelaten basisoplossing beschikken. Deze kan in principe op dezelfde wijze worden verkregen als bij het standaardprobleem. Een mogelijkheid, die zich bij het standaardtransportprobleem niet kan voordoen, is, dat men een cirkel zou willen plaatsen in een vak (r, k) met $e_{rk} < \min(a_r, b_k)$. Men brengt dan geen cirkel aan in dit vak, doch vermindert a_r en b_k met e_{rk} en stelt $x_{rk} = e_{rk}$.

Verder kan het voorkomen, dat één of meer rijen of kolommen niet geschrapt kunnen worden, omdat in alle niet geschrapte vakken van zo'n rij of kolom de x_{ij} op hun bovengrens zijn gebracht. Om ook dan de beschreven

methode te kunnen toepassen, voeren we schijnhavens P_{m+1} en Q_{n+1} in met $a_{m+1} = b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i$ en vatten we alle routes van P_{m+1} naar $Q_1, \dots, Q_n$ en van $P_1, \dots, P_m$ naar Q_{n+1} op als verboden routes. De corresponderende index-paren worden opgenomen in de verzameling N . Het probleem wordt dus vervangen door:

minimaliseer

$$(9.46) \quad y = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} x_{ij}$$

onder de voorwaarden

$$(9.47) \quad \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \dots, m+1)$$

$$(9.48) \quad \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \dots, n+1)$$

$$(9.49) \quad x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m+1; j = 1, \dots, n+1)$$

$$(9.50) \quad x_{ij} \leq e_{ij} \quad (i = 1, \dots, m+1; j = 1, \dots, n+1),$$

waarbij

$$a_{m+1} = b_{n+1} = g = \sum_{i=1}^m a_i$$

$$(9.51) \quad e_{m+1,j} = g \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$e_{i,n+1} = g \quad (i = 1, \dots, m+1)$$

$$c_{m+1,j} = M \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$(9.52) \quad c_{i,n+1} = M \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$c_{m+1,n+1} = 0,$$

met

$$(9.25) \quad M \geq (m+n) \max_{(i,j) \notin N} |c_{ij}|.$$

We passen nu de beschreven regels voor de constructie van een beginoplossing toe, maar laten daarbij aanvankelijk de $(m+1)$ -ste rij en de $(n+1)$ -ste kolom buiten beschouwing. Wordt hiermee een toegelaten oplossing van het oorspronkelijke probleem gevonden, dan laten we de toegevoegde rij en kolom weg.

In het andere geval zetten we de procedure voort met de rijen 1 t/m m en alle kolommen. Wegens $a_i < b_{n+1}$ voor $i = 1, \dots, m$ worden dan achtereenvolgens cirkels geplaatst in alle vakken $(i, n+1)$, die behoren bij niet geschrapte rijen i , met $x_{i, n+1} = a_i$. Daarna plaatsen we op overeenkomstige wijze in elke niet geschrapte kolom j een cirkel in vak $(m+1, j)$ met $x_{m+1, j} = b_j$. We eindigen met het plaatsen van een cirkel in $(m+1, n+1)$.

Indien de toepassing van de beschreven algoritme op het uitgebreide probleem niet leidt tot een oplossing, waarvoor alle kunstmatige variabelen de waarde nul hebben, bezit het probleem wegens de keuze van M volgens (9.25) geen toegelaten oplossing. Is dit wel het geval, dan bereiken we na enige stappen een basisoplossing, die behalve de basisvariabele $x_{m+1, n+1}$ met de waarde g ook nog een basisvariabele $x_{m+1, j}$ of $x_{i, n+1}$ met de waarde nul bevat. We kunnen dan rij $m+1$ en kolom $n+1$ verder weglaten.

We zullen de beschreven methode toelichten aan de hand van het volgende voorbeeld.

VOORBEELD 9.4. Gevraagd wordt het probleem (9.1), ..., (9.4), (9.32) op te lossen, wanneer

$$m = n = 3,$$

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 8,$$

$$b_1 = 6, \quad b_2 = 4, \quad b_3 = 6,$$

en waarvoor de kostencoëfficiënten c_{ij} zijn opgenomen in tabel 9.15 en de bovengrenzen e_{ij} in tabel 9.16.

Tabel 9.15

De c_{ij} -tabel

2	5	6
7	4	8
2	4	9

Tabel 9.16

De e_{ij} -tabel

2	3	4
4	5	3
7	1	3

In de te gebruiken tabellen zal in elk vak (i,j) steeds in de rechter bovenhoek de waarde van c_{ij} vermeld worden en in de linker bovenhoek de waarde van e_{ij} . Als een variabele x_{ij} de waarde van zijn bovengrens heeft aangenomen, zal dit worden aangegeven door een schuine driehoek in de linker onderhoek.

Tabel 9.17

De beginoplossing

$v_j \backslash u_i$	$-2M+8$	2	6	$-M+6$	totaal
0	2 2 3 5 4 6 16 M	2M-63.....	1	2M-6	3
2	4 7 5 4 3 8 16 M				
2M-6	7 2 1 4 3 9 16 M	4-2M+8.....	-2M+9	1	8
M-6	16 M 16 M 16 M 16 0				
totaal	6 4 6 16 32				

Tabel 9.17 toont de beginoplossing. Achtereenvolgens werd x_{11} op zijn bovengrens geplaatst, werd $x_{22} = 4$ gesteld en kolom 2 geschrapt, $x_{31} = 4$ gesteld en kolom 1 geschrapt, $x_{13} = 1$, rij 1 geschrapt, $x_{23} = 1$, rij 2 geschrapt, x_{33} op zijn bovengrens geplaatst, $x_{34} = 1$, $x_{43} = 1$ en $x_{44} = 15$ gesteld. Er zijn twee mogelijkheden om de waarde van de criteriumfunctie te verlagen, want $x_{11} = e_{11} = 2$ met $c_{11} - z_{11} = 2M-6 > 0$ en $x_{32} = 0$ met $c_{32} - z_{32} = -2M+8 < 0$. Aangezien $|2M-6| > |-2M+8|$, wordt de waarde van x_{11} verminderd. Veranderingen van x_{ij} -waarden vinden plaats in de hoekpunten van de gestippelde weg. $K^- = \{(1,1), (4,3), (3,4)\}$, $K^+ = \{(1,3), (4,4), (3,1)\}$. $\theta^- = \min(2,1,1) = 1$, $\theta^+ = \min(3,1,3) = 1$, $\bar{\theta} = \min(1,1) = 1$. Er wordt een cirkel aangebracht in vak $(1,1)$ en de gewijzigde x_{ij} -waarden worden in de cirkels genoteerd. De cirkel in $(4,3)$ wordt verwijderd. Daar ook x_{34} de waarde

0 heeft gekregen, kunnen verder de vierde rij en de vierde kolom worden weggelaten.

Tabel 9.18

De eerste verbeterde oplossing

$v_j \backslash u_i$	2			2			6						totaal
0	2	2	3		5	4		6	16		M		3
2	4	7	5		4	3		8	16		M		5
0	7	2	1		4	3		9	16		M		8
	16	M	16		M	16		M	16		0		16
totaal	6			4			6			16			32

Tabel 9.19

De tweede verbeterde oplossing

$v_j \backslash u_i$	-1	2						6						totaal
0	2	2	3	5	4	6		3					3	
2	4	7	5	4	3	8		6	4	1			5	
3	7	2	1	4	3	9		6	-1	2			8	
totaal	6	4						6						16

Uitgaande van de eerste verbeterde oplossing, weergegeven in tabel 9.18, kan een betere oplossing worden bereikt door de waarde van x_{33} te laten afnemen. Het resultaat staat in tabel 9.19. Ook deze oplossing kan nog verbeterd worden wegens $c_{32} - z_{32} = -1$, $x_{32} = 0$. We vinden nu $\theta^- = \min(2, 4) = 2$, $\theta^+ = \min(1, 2) = 1$, $\bar{\theta} = \min(2, 1) = 1 = e_{32}$, zodat x_{32} de waarde 1 krijgt zonder dat er iets aan de plaatsing van de cirkels is veranderd. De zo verkregen oplossing, weergegeven in tabel 9.20 is optimaal, daar voor alle (i, j) aan (9.41), (9.42) is voldaan.

Tabel 9.20
De optimale oplossing

$u_i \backslash v_j$	-1	2	6	totaal
0	2 3	2 3	3 5 4 6 3	3
2	4 6	7 5 3	4 3 2	5
3	7 6	2 1	4 3 1 -1	8
totaal	6	4	6	16

Het transitoprobleem

Bij de formulering van het transportprobleem werd verondersteld, dat er geen goederen verzonden konden worden vanuit de bestemmingshavens Q_j of naar de opslaghavens P_i . Laat men deze aanname vallen, zodat de goederen in de havens zowel geladen als gelost als overgeslagen mogen worden, dan verkrijgt men het zogenaamde transitoprobleem (transshipment problem). We noemen de havens $R_1, \dots, R_n$ en nemen aan, dat er a_j eenheden meer moeten aankomen in R_j dan er vanuit R_j naar elders worden verzonden. Stelt x_{ij} de hoeveelheid voor, die van R_i naar R_j wordt verzonden, dan kan dit wiskundig worden geformuleerd als

$$(9.53) \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n x_{ij} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n x_{jk} = a_j \quad (j = 1, \dots, n),$$

met

$$(9.54) \quad x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n; j \neq i).$$

We nemen aan, dat we te maken hebben met een gesloten vervoerssysteem, zodat geldt

$$(9.55) \quad \sum_{j=1}^n a_j = 0.$$

Als de kosten per eenheid van transport P_i naar P_j worden voorgesteld door

c_{ij} en men de totale transportkosten wil minimaliseren, wordt gevraagd zodanige waarden van de variabelen x_{ij} te berekenen, dat

$$(9.56) \quad y = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_{ij} x_{ij}$$

minimaal wordt en is voldaan aan (9.53) en (9.54).

We zullen nu aantonen, dat een transitoprobleem bijna altijd in een standaardtransportprobleem kan worden omgezet. Het is slechts dan niet mogelijk, als vervoer van een eenheid goed van een haven R_j over andere plaatsen terug naar R_j negatieve kosten met zich meebrengt. Men kan dan een willekeurig lage waarde van y bereiken door het vervoer over deze gesloten route onbegrensd te laten toenemen. Een dergelijke oplossing kan nooit een oplossing van een standaard transportprobleem zijn, omdat de waarden van de daarin voorkomende variabelen steeds begrensd zijn.

Heeft men niet te maken met de zojuist beschreven mogelijkheid, dan zal in de optimale oplossing de som van alle transporten naar een haven ten hoogste gelijk kunnen zijn aan de som van de hoeveelheden, die elders worden aangeboden. Daar de som van de gevraagde hoeveelheden gelijk is aan de som van de aangeboden hoeveelheden, zal een optimale oplossing steeds voldoen aan

$$(9.57) \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n x_{ij} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |a_k| \quad (j = 1, \dots, n).$$

We definiëren nu

$$(9.58) \quad g = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |a_k|,$$

en voeren in

$$(9.59) \quad x_{jj} = g - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n x_{ij} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Dan geldt

$$(9.60) \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = g \quad (j = 1, \dots, n),$$

en voor oplossingen, die voldoen aan (9.53) tevens

$$(9.61) \quad \sum_{k=1}^n x_{jk} = g - a_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

Een oplossing, die voldoet aan (9.60) en (9.61), voldoet ook aan (9.53) en omgekeerd. We mogen dus (9.53) vervangen door (9.60) en (9.61). Omdat de optimale oplossing voldoet aan (9.57), mogen we wegens (9.58) en (9.59) ook (9.54) vervangen door

$$(9.62) \quad x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n).$$

Het transitoprobleem is hiermee vervangen door het transportprobleem (9.56), (9.60) t/m (9.62). Wegens $\sum_{j=1}^n g = \sum_{j=1}^n (g - a_j)$ is hierbij de som van de rijtotalen gelijk aan de som van de kolomtotalen.

De bovenstaande beschouwing wordt in geen enkel opzicht beïnvloed door het aanwezig zijn van bovengrenzen voor de variabelen. Men kan dus op dezelfde wijze *transitoproblemen met bovengrenzen* omzetten in transportproblemen met bovengrenzen.

Daar niet bestaande verbindingen op de eerder beschreven wijze kunnen worden uitgeschakeld door het toekennen van hoge kosten, kunnen alle transitoproblemen met bovengrenzen op willekeurige netwerken als transportproblemen met bovengrenzen worden opgelost. Omdat deze een eindige optimale oplossing bezitten, mogen hierbij zelfs willekeurige negatieve kostencoëfficiënten optreden. Op de keuze van g bij de laatstgenoemde problemen gaan wij niet verder in.

Verschillende problemen, die niets met het transport van goederen te maken hebben, kunnen toch als transportprobleem of transitoprobleem worden geformuleerd en dus met de verdelingsmethode worden opgelost. Als voorbeeld zullen wij nu voorbeeld 1.5 uit deel 6a formuleren als transitoprobleem met bovengrenzen.

VOORBEELD 9.5 (identiek aan voorbeeld 1.5). Een inkoop- en voorraadkostenprobleem. Een groothandel beschikt voor één van zijn handelsartikelen, een seizoenartikel, over een pakhuis met een gegeven capaciteit van k eenheden. Het artikel kan gedurende het seizoen, dat t maanden duurt, aan het begin van iedere maand ingekocht worden, zij het niet steeds tegen dezelfde prijs per eenheid; deze prijzen bedragen in de opeenvolgende maanden $p_1, \dots, p_t$. De verkoopprijs is constant. De vraag naar het artikel is voor de opeenvolgende maanden bekend en gelijk aan $d_1, \dots, d_t$. Hieraan moet worden voldaan. Verder nemen wij aan, dat de vraag in een bepaalde maand gelijkmatig

over die maand verdeeld is. De kosten van het in voorraad houden zijn c_1 per eenheid per maand.

De inkoper van de groothandel vraagt zich af hoeveel eenheden hij iedere maand moet bestellen, teneinde de som van de inkoopkosten en de voorraadkosten te minimaliseren.

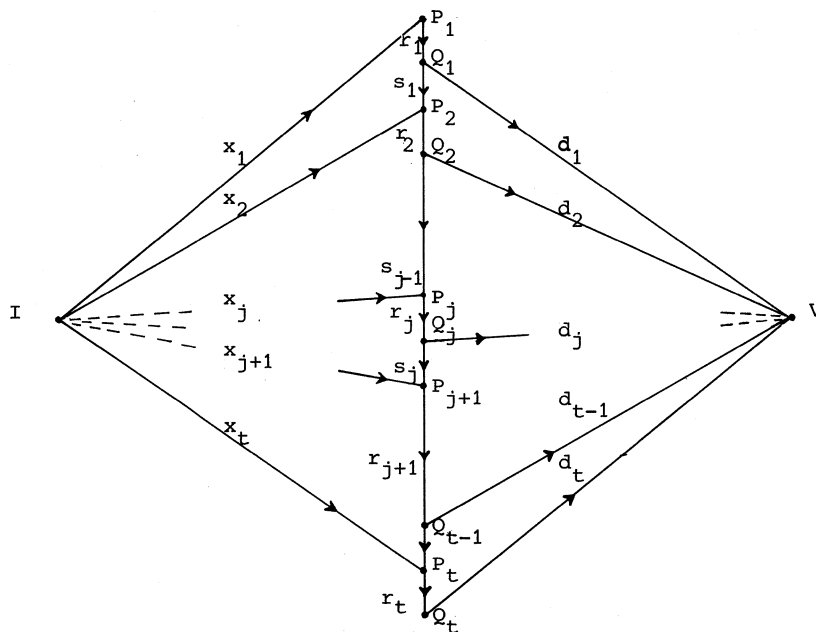


fig. 9.1

Netwerkvoorstelling van voorbeeld 1.5

We formuleren dit voorbeeld aan de hand van figuur 9.1. Punt I stelt de inkoopmarkt voor, waar de goederenstroom begint en punt V de verkoopmarkt, waar de stroom eindigt. In alle andere punten moet de binnenkomende stroom gelijk zijn aan de uitgaande stroom. De punten P_j corresponderen met het pakhuis aan het begin van periode j , de punten Q_j hebben betrekking op het pakhuis in het midden van periode j . De goederen mogen de lijnen volgen in de richting van de pijlen.

Wij geven van elke maand j de in te kopen hoeveelheid aan met x_j , de voorraad aan het begin van de maand met r_j en die aan het eind van de maand met s_j . Verder verbinden wij kosten p_j per eenheid aan "vervoer" langs $I P_j$ en kosten $\frac{1}{2}c_1$ per eenheid aan vervoer langs $P_j Q_j$ en $Q_j P_{j+1}$. Bovendien mag

het vervoer langs $P_j Q_j$ niet meer dan k eenheden bedragen.

Minimaliseert men de kosten van de vervoersstroom door het aldus opgestelde netwerk, dan vindt men de oplossing van het gestelde probleem, wanneer men minimaliseert

$$(9.63) \quad y = \sum_{j=1}^t p_j x_j + \frac{1}{2} c_1 \left(\sum_{j=1}^t r_j + \sum_{j=1}^t s_j \right)$$

onder de voorwaarden

$$s_0 = 0, s_t = 0$$

$$x_j + s_{j-1} = r_j \quad (j = 1, \dots, t)$$

$$(9.64) \quad s_j + d_j = r_j \quad (j = 1, \dots, t)$$

$$r_j \leq k \quad (j = 1, \dots, t)$$

$$x_j \geq 0, r_j \geq 0, s_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, t).$$

Transportproblemen met ongelijkheidsrestricties

Heeft men te maken met een transportprobleem, waarin (9.2) is vervangen door

$$(9.65) \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

en is

$$(9.66) \quad \sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j,$$

dan kan een omzetting plaats vinden in een transportprobleem met gelijkheidsrestricties. De ongelijkheden (9.65) worden na het invoeren van verschilvariabelen vervangen door

$$(9.67) \quad \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$(9.68) \quad x_{i,n+1} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Omdat alle oplossingen van (9.67) en (9.3) voldoen aan

$$(9.69) \quad \sum_{i=1}^m x_{i,n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j,$$

mag men aan de voorwaarden (9.3) toevoegen

$$(9.70) \quad \sum_{i=1}^m x_{i,n+1} = b_{n+1},$$

met

$$(9.71) \quad b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j.$$

Definieert men tenslotte

$$(9.72) \quad c_{i,n+1} = 0 \quad (i = 1, \dots, m),$$

dan hebben we een standaardtransportprobleem verkregen met m rijvergelijkingen en $(n+1)$ kolomvergelijkingen.

Beschouw nu een probleem, waarin gevraagd wordt (9.1) te minimaliseren onder de voorwaarden (9.65), (9.4) en

$$(9.73) \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

Bezit dit probleem een toegelaten oplossing, dus is voldaan aan (9.66), en geldt voor de kosten

$$(9.74) \quad c_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n),$$

dan bezit het een optimale oplossing, die voldoet aan (9.3). Immers als in een optimale oplossing voor zekere k geldt, dat $\sum_{i=1}^m x_{ik} > b_k$, dan bereikt men een oplossing met $\sum_{i=1}^m x_{ik} = b_k$ door de waarden van één of meer variabelen x_{ik} te verlagen, totdat het $=$ - teken geldt. De waarde van de criteriumfunctie neemt hierdoor niet toe, terwijl de nieuwe oplossing blijft voldoen aan (9.66).

Alle problemen, die slechts hierin van een standaardtransportprobleem verschillen, dat in (9.2), (9.3) een of meer $=$ - tekens zijn vervangen door $\geq$ - of $\leq$ - tekens, kunnen worden opgelost als standaardtransportprobleem. Men behoeft hiervoor slechts de transporttabel, die men zou hebben opgesteld voor het overeenkomstige probleem (9.1), ..., (9.4) uit te breiden met

één rij en één kolom. Voor nadere bijzonderheden verwijzen wij naar een artikel van D. KLINGMAN & R. RUSSELL^{*)}.

Generalisering van het transportprobleem

Verschillende problemen kunnen worden weergegeven door modellen, die te beschouwen zijn als generalisering van de tot dusver behandelde transportproblemen. Wij noemen dit gegeneraliseerde transportproblemen.

Een voorbeeld van een gegeneraliseerd transportprobleem is het volgende.

VOORBEELD 9.6. Een gegeneraliseerd transportprobleem. Op m verschillende machines kunnen n verschillende produkten worden gemaakt. Van elke machine i is de tijd a_i bekend, dat hij in de beschouwde tijdsperiode beschikbaar is. Van elk produkt j moet in deze periode een hoeveelheid van minstens b_j gemaakt worden. De kosten van het maken van een eenheid van produkt j op machine i bedragen c_{ij} , terwijl de hiervoor benodigde tijd d_{ij} is. Omstelkosten en -tijden spelen geen rol. Gevraagd wordt een optimaal productieschema vast te stellen.

Stelt men x_{ij} = het aantal eenheden van produkt j , dat gemaakt moet worden op machine i , dan kan dit probleem geformuleerd worden als:
minimaliseer

$$(9.75) \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

onder de bijvoorwaarden

$$(9.76) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} &\leq a_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &\geq b_j \quad (j = 1, \dots, n) \\ x_{ij} &\geq 0 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Gegeneraliseerde transportproblemen kunnen worden opgelost met behulp van methoden, die nauw verwant zijn met de verdelingsmethode. Voor nadere

^{*)} D. KLINGMAN & R. RUSSELL, *The Transportation Problem with Mixed Constraints*, Operational Research Quarterly, 25 (1974), p.447-455.

bijzonderheden verwijzen wij naar de literatuur^{*)}.

Tenslotte merken wij nog op, dat alle in deze paragraaf besproken problemen behalve met de verdelingsmethode ook efficiënt kunnen worden opgelost met de zogenaamde out-of-kiltermethode, een primal-dual methode. Een uitstekende beschrijving van deze methode is te vinden in een boek van E.G. LAWLER^{**)}.

^{*)} G.B. DANTZIG, *Linear programming and extensions*, Princeton University Press, Princeton, (1963), blz. 413 e.v.

^{**)} E.G. LAWLER, *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*, Holt, Rinehart and Winston, New York (1976).

10. INLEIDING TOT DE CONVEXE PROGRAMMERING

Zoals wij zagen in §2, kan een convex programmeringsprobleem als volgt worden geformuleerd:

maximaliseer

$$(10.1) \quad y = f(x)$$

onder voorwaarden

$$(10.2) \quad \begin{aligned} g_i(x) &\leq b_i & (i = 1, \dots, m) \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Aangenomen wordt, dat $f(x)$ en $g_i(x)$ differentieerbare functies van de n -dimensionale vector x voorstellen, dat $f(x)$ concaaf is en $g_i(x)$ convex. Men spreekt over een convex programmeringsprobleem, omdat het toegelaten gebied, d.w.z. de verzameling van de punten x , die aan (10.2) voldoen, convex is.

Wij bespreken eerst enkele begrippen uit de meetkunde van de Euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$, dan een aantal stellingen uit de analyse en enkele consequenties, die voortvloeien uit de eigenschappen van het door (10.1) en (10.2) geformuleerde probleem, en leiden tenslotte twee stellingen over stelsels ongelijkheden af.

Enkele begrippen en stellingen uit de meetkunde van de Euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$

De meeste te behandelen begrippen zijn generalisering van overeenkomstige begrippen in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, hetgeen de mogelijkheid schept eigenschappen toe te lichten aan de hand van figuren.

DEFINITIE 10.1. De *rechte lijn* door twee onderling verschillende punten A en B (zie fig. 10.1) is de verzameling van de punten Z , die voldoen aan

$$(10.3) \quad Z = (1-\lambda)A + \lambda B.$$

OPMERKING 10.1. In $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ liggen punten Z met $\lambda \in (0,1)$, zoals $M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ in fig. 10.1, tussen A en B in. In $\mathbb{R}^n$ zullen wij naar analogie hiervan eveneens zeggen, dat de punten Z met $\lambda \in (0,1)$ tussen A en B in liggen.

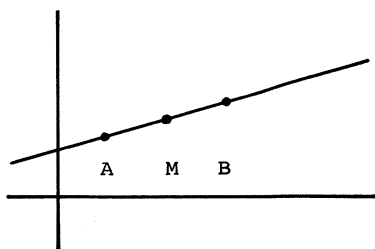


fig. 10.1

Een rechte lijn $Z = (1-\lambda)A + \lambda B$

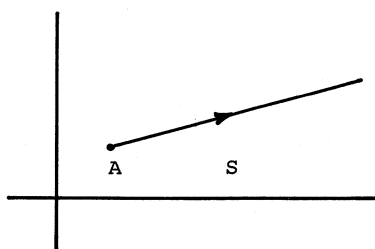


fig. 10.2

Een halfrechte $Z = A + \lambda S, \lambda \geq 0$

Noemt men $B - A = S$, dan geeft S de richting aan, waarin men moet gaan om van A in B te komen. Voor (10.3) kan men ook schrijven

$$(10.4) \quad Z = A + \lambda S.$$

DEFINITIE 10.2. De *halfrechte* vanuit een punt A in de richting S is de verzameling van de punten Z , die aan (10.4) voldoen met $\lambda \geq 0$ (zie fig. 10.2).

DEFINITIE 10.3. De Euclidische norm van een vector T met componenten t_j ($j = 1, \dots, n$) is

$$(10.5) \quad |T| = \sqrt{T' T} = \sqrt{\sum_{j=1}^n t_j^2}.$$

In het vervolg noemen wij deze norm *de lengte* van de vector.

In fig. 10.3 is de hoek ϕ getekend tussen twee vectoren R en S in $\mathbb{R}^2$, die hoeken α resp. β met de x_1 -as maken. Is $R' = (r_1, r_2)$ en $S' = (s_1, s_2)$, dan geldt

$$\cos \phi = \cos(\alpha - \beta)$$

$$= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{r_2}{|R|} \cdot \frac{s_2}{|S|} + \frac{r_1}{|R|} \cdot \frac{s_1}{|S|}$$

$$= \frac{R'S}{|R||S|}.$$

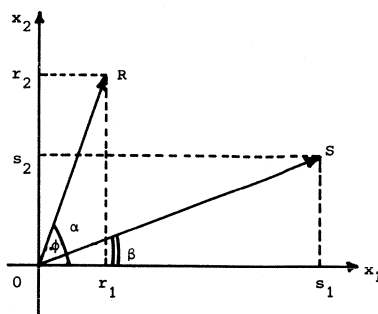


fig. 10.3. De hoek tussen twee vectoren

Als R een scherpe hoek maakt met S is $\cos \phi > 0$ en geldt $R'S > 0$, maakt R een stompe hoek met S , dan is $R'S < 0$ en staan R en S loodrecht op elkaar, dan is $R'S = 0$.

Men kan bewijzen, dat voor de hoek ϕ tussen twee vectoren R en S in $\mathbb{R}^3$ eveneens geldt:

$$(10.6) \quad \cos \phi = \frac{R'S}{|R| \cdot |S|}.$$

Zien wij af van deze meetkundige interpretatie en gaan wij uit van twee willekeurige vectoren R en S in $\mathbb{R}^n$, dan geldt volgens de ongelijkheid van SCHWARZ

$$|R'S| \leq |R| \cdot |S|,$$

zodat

$$-1 \leq \frac{R'S}{|R| \cdot |S|} \leq 1.$$

Deze betrekking stelt ons in staat (10.6) te gebruiken als definitievergelijking voor de hoek tussen twee vectoren R en S in $\mathbb{R}^n$, als $n > 3$.

DEFINITIE 10.4. De hoek tussen twee vectoren R en S wordt vastgelegd door (10.6).

OPMERKING 10.2. De hoek tussen twee halfrechten wordt gelijk gesteld aan de hoek tussen de bijbehorende vectoren.

DEFINITIE 10.5. Een *hypervlak* is de verzameling van de punten X , die voldoen aan

$$A'X = c,$$

waarbij A een vaste, van de nulvector verschillende vector voorstelt en c een vast getal.

Een hypervlak in $\mathbb{R}^2$ is volgens deze definitie een rechte lijn, in $\mathbb{R}^3$ is het een plat vlak. Een hypervlak $A'X = A'X_0$ is de verzameling van alle punten, die men bereikt, wanneer men zich vanuit X_0 *) verplaatst in een richting loodrecht op A . Immers, $A'(X - X_0) = 0$, dus als ϕ de hoek tussen A en $X - X_0$ voorstelt, geldt $\cos \phi = 0$, zodat $\phi = \frac{1}{2}\pi$.

DEFINITIE 10.6. Een *halfruimte* is de verzameling van de punten X , die voldoen aan

$$A'X \geq c,$$

waarbij A een vaste, van de nulvector verschillende vector voorstelt en c een vast getal.

Een halfruimte $A'X \geq A'X_0$ is wegens $A'(X - X_0) \geq 0$ de verzameling van de punten, die men bereikt, wanneer men zich vanuit X_0 beweegt in een richting, die een niet-stompe hoek maakt met de richting A . Men kan ook schrijven

$$X = X_0 + R,$$

met $A'R \geq 0$. De verzameling van de punten X , die hieraan voldoen, is dezelfde halfruimte $A'X \geq A'X_0$ (zie fig. 10.4).

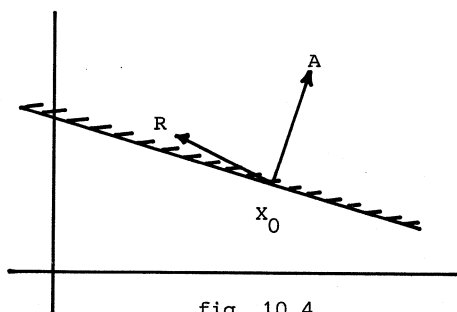


fig. 10.4

De halfruimte $A'X \geq A'X_0$

*) Het hier ingevoerde punt X_0 houdt geen verband met de in §4 ingevoerde vector X_0 .

Enkele begrippen en stellingen uit de analyse

Bij de bewijsvoering van de stellingen in de convexe programmering wordt veel gebruik gemaakt van de stelling van TAYLOR. Voor $n = 1$ luidt deze als volgt.

Is de functie $f(x)$ op het interval (a,b) m keer differentieerbaar en is de $(m-1)$ -ste afgeleide continu in de punten a en b , dan bestaat er bij ieder punt $x_0 \in [a,b]$ en ieder punt $x_0+s \in [a,b]$ een getal $\tau \in [0,1]$ zodanig, dat

$$f(x_0+s) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{s^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{s^m}{m!} f^{(m)}(x_0+\tau s).$$

Voor $m = 1$ en $m = 2$ krijgen wij dus

$$f(x_0+s) = f(x_0) + sf'(x_0+\tau s),$$

respectievelijk

$$f(x_0+s) = f(x_0) + sf'(x_0) + \frac{1}{2}s^2 f^{(2)}(x_0+\tau s).$$

Voor functies van meer dan één variabele kan de stelling op overeenkomstige wijze worden geformuleerd:

Bezit de functie $f(X)$ in ieder punt van een convexe verzameling $Z \subset \mathbb{R}^n$ continue partiële afgeleiden van de orde m , dan bestaat er bij ieder punt $x_0 \in Z$ en ieder punt $x_0+s \in Z$ een getal $\tau \in [0,1]$ zodanig, dat geldt

$$(10.7) \quad f(x_0+s) = f(x_0) + \sum_{j=1}^n s_j \frac{\partial f(x_0+\tau s)}{\partial x_j},$$

voor $m = 1$, respectievelijk

$$(10.8) \quad f(x_0+s) = f(x_0) + \sum_{j=1}^n s_j \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n s_j \frac{\partial^2 f(x_0+\tau s)}{\partial x_j \partial x_k} s_k,$$

voor $m = 2$.

DEFINITIE 10.7. Als $f(X)$ een reële functie is van n reële variabelen $x_1, \dots, x_n$ en de n partiële afgeleiden $\frac{\partial f(X)}{\partial x_j}$ ($j = 1, \dots, n$) in het punt x_0 bestaan, dan noemt men de n -dimensionale vector

$$(10.9) \quad \nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \right)'$$

de gradiënt van de functie f in het punt $x_0^*)$.

Voor de matrix van tweede afgeleiden $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_j \partial x_k}$ gebruiken wij het symbool $H_f(x_0)$. Deze matrix wordt de matrix van HESSE genoemd.

Met gebruikmaking van de zojuist ingevoerde notaties kunnen wij voor (10.7) en (10.8) schrijven

$$(10.10) \quad f(x_0 + S) = f(x_0) + S' \nabla f(x_0 + \tau S)$$

en

$$(10.11) \quad f(x_0 + S) = f(x_0) + S' \nabla f(x_0) + \frac{1}{2} S' H_f(x_0 + \tau S) S.$$

De gradiënt in een punt x_0 bezit enige eigenschappen, die nauw samenhangen met de richtingsafgeleide in dat punt, waarvoor de volgende definitie geldt.

DEFINITIE 10.8. De *richtingsafgeleide* van een differentieerbare functie $f(x)$ in het punt x_0 in de richting S_0 is

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda S_0) - f(x_0)}{\lambda}.$$

STELLING 10.1. Voor continu differentieerbare functies $f(x)$ geldt:

$$(10.12) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda S_0) - f(x_0)}{\lambda} = S_0' \nabla f(x_0).$$

BEWIJS. Als x_0 en $x_0 + y_0$ ($y_0 \neq 0$) behoren tot een convexe verzameling Z , waarop $f(x)$ continu differentieerbaar is, volgt uit (10.10), dat er een $\tau \in [0, 1]$ bestaat, zodanig, dat

$$f(x_0 + y_0) = f(x_0) + y_0' \nabla f(x_0 + \tau y_0).$$

Met $y_0 = \lambda S_0$ wordt dit

$$f(x_0 + \lambda S_0) = f(x_0) + \lambda S_0' \nabla f(x_0 + \tau \lambda S_0),$$

zodat

$$\frac{f(x_0 + \lambda S_0) - f(x_0)}{\lambda} = S_0' \nabla f(x_0 + \tau \lambda S_0).$$

*) Het symbool ∇ draagt de naam nabla.

Nemen wij hiervan de limiet voor $\lambda \rightarrow 0$, dan staat er juist (10.12). $\square$

STELLING 10.2. Een differentieerbare functie $f(x)$ neemt vanuit een punt x_0 toe in alle richtingen, die een scherpe hoek maken met de gradiënt $\nabla f(x_0)$.

BEWIJS. Als S_0 een scherpe hoek maakt met $\nabla f(x_0)$, is

$$S_0' \nabla f(x_0) > 0.$$

Uit (10.12) volgt dan

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda S_0) - f(x_0)}{\lambda} > 0,$$

hetgeen inhoudt, dat er een getal $\delta > 0$ te vinden is, zodanig, dat voor alle $\lambda \in (0, \delta]$ geldt:

$$f(x_0 + \lambda S_0) > f(x_0).$$

$f(x)$ neemt dus toe in de richting S_0 . $\square$

STELLING 10.3. Wanneer voor een differentieerbare functie $f(x)$ in het punt x_0 geldt, dat $\nabla f(x_0) \neq 0$ is, dan neemt deze functie vanuit x_0 maximaal toe in de richting van de gradiënt.

BEWIJS. Uit (10.12) volgt, dat $f(x)$ vanuit x_0 maximaal toeneemt in die richting, waarvoor de richtingsafgeleide maximaal is. Zonder begrenzing van de lengte van S is het maximum van $S' \nabla f(x_0)$ uiteraard oneindig. Daarom maximaliseren wij $S' \nabla f(x_0)$ onder de voorwaarde $|S| = 1$. Uit (10.6) volgt dan

$$S' \nabla f(x_0) = |S| |\nabla f(x_0)| \cos \phi = |\nabla f(x_0)| \cos \phi,$$

waarbij ϕ de hoek tussen S en $\nabla f(x_0)$ voorstelt. Het is duidelijk, dat het maximum van $S' \nabla f(x_0)$ wordt bereikt voor $\cos \phi = 1$, dus voor $\phi = 0$. De vector S met lengte 1, die $S' \nabla f(x_0)$ maximaliseert, is dus

$$\bar{S} = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}. \quad \square$$

STELLING 10.4. Een noodzakelijke voorwaarde, opdat een differentieerbare

functie $f(x)$ in het punt x_0 een maximum bereikt, is

$$\nabla f(x_0) = 0.$$

BEWIJS. Als $\nabla f(x_0) \neq 0$, is

$$(\nabla f(x_0))' \nabla f(x_0) > 0.$$

Volgens stelling 10.2 kan x_0 dan geen maximum zijn. $\square$

Wanneer in een convex programmeringsprobleem de punten x niet vrij gekozen kunnen worden, maar zij moeten liggen in een toegelaten gebied X , dan definiëren wij een toegelaten richting vanuit een toegelaten punt x_0 als volgt.

DEFINITIE 10.9. Een richting S is een *toegelaten richting vanuit x_0* , ($x_0 \in X$), als er een positief getal δ bestaat met de eigenschap, dat $x_0 + \lambda S \in X$ voor alle $\lambda \in (0, \delta]$.

STELLING 10.5. Indien $\bar{x}$ een optimale oplossing is van het convexe programmeringsprobleem (10.1), (10.2), geldt voor alle toegelaten richtingen S vanuit $\bar{x}$:

$$S' \nabla f(\bar{x}) \leq 0.$$

BEWIJS. Stel, dat voor een toegelaten richting S_0 geldt:

$$S_0' \nabla f(\bar{x}) > 0,$$

zodat $f(x)$ in de richting S_0 toeneemt volgens stelling 10.2. Dan is er een $\delta_1 > 0$ zodanig, dat $f(\bar{x} + \lambda S_0) > f(\bar{x})$ voor alle $\lambda \in (0, \delta_1]$. Verder bestaat er een $\delta_2 > 0$ met de eigenschap, dat $\bar{x} + \lambda S_0 \in X$ voor alle $\lambda \in [0, \delta_2]$. Voor $\lambda \in (0, \min(\delta_1, \delta_2)]$ stelt $\bar{x} + \lambda S_0$ dus steeds een toegelaten oplossing voor met hogere criteriumfunctiewaarde dan $f(\bar{x})$. De bovenstaande bewering kan dus niet juist zijn. $\square$

Uit het bewijs van stelling 10.5 blijkt, dat vanuit een punt x_0 een toegelaten punt x met hogere waarde van de criteriumfunctie kan worden bereikt, als er een toegelaten richting S_0 bestaat met $S_0' \nabla f(x_0) > 0$. Dit leidt tot de volgende definitie.

DEFINITIE 10.10. Een toegelaten richting S_0 vanuit een toegelaten punt x_0 is een *bruikbare richting*, als $S_0' \nabla f(x_0) > 0$.

Enkele definities en eigenschappen met betrekking tot convexe en concave functies

De nu volgende definities en eigenschappen vormen gedeeltelijk een herhaling van de in deel 1, §13 van deze leergang behandelde stof.

DEFINITIE 10.11. Een functie $f(X)$, gedefinieerd voor alle $X \in \mathbb{R}^n$, is *convex*, als

$$(10.13) \quad f((1-\lambda)A + \lambda B) \leq (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B)$$

en *concaaf*, als

$$(10.14) \quad f((1-\lambda)A + \lambda B) \geq (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B),$$

voor ieder tweetal punten A en B , $A \neq B$ en iedere $\lambda \in (0,1)$.

De functie $f(X)$ heet *strikt convex (concaaf)* als in bovenstaande voorwaarden steeds het ongelijktteken geldt.

Uit definitie 10.11 kunnen we de volgende eigenschappen afleiden:

- Een lineaire functie is convex en concaaf (het gelijktteken geldt hier altijd), maar niet strikt convex of strikt concaaf.
- De som van een aantal convexe (concave) functies is weer convex (concaaf).
- De som van een aantal convexe (concave) functies, waarvan ten minste één functie strikt convex (concaaf) is, is strikt convex (concaaf).
- Als $f(X)$ (strikt) convex is, dan is $-f(X)$ (strikt) concaaf, en omgekeerd.

Figuur 10.5 toont de grafische voorstelling van een strikt convexe functie van één variabele, $f(x)$. Een willekeurig punt van de koorde tussen $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$ heeft als x-coördinaat $(1-\lambda)a + \lambda b$, en als y-coördinaat $(1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$, $0 < \lambda < 1$. Voor het punt met dezelfde x-coördinaat op de kromme geldt: $y = f((1-\lambda)a + \lambda b)$. Overeenkomstig (10.13) ligt het punt op de kromme onder het punt op de koorde. Op dezelfde manier ligt bij een strikt concave functie een punt op een koorde steeds onder het punt op de kromme met dezelfde x-coördinaat.

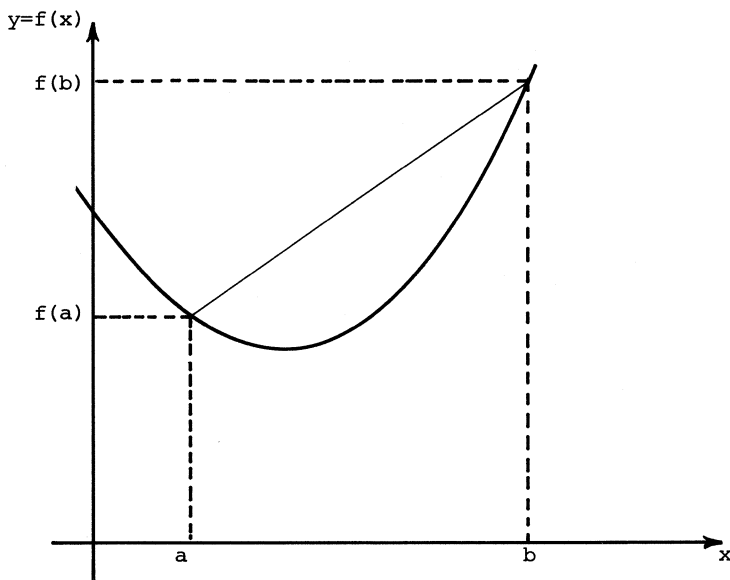


fig. 10.5

Een convexe functie

Is de functie $f(x_1, x_2)$ strikt convex, dan vormen de punten (x_1, x_2, y) in $\mathbb{R}^3$, die voldoen aan $y = f(x_1, x_2)$ een gekromd oppervlak met de eigenschap, dat de punten op de koorden steeds boven dit oppervlak liggen. Bij een convexe functie kan de koorde geheel tot het oppervlak behoren.

Uit de besproken eigenschappen blijkt, dat men in probleem (10.1), (10.2), indien men definieert: $h_i(X) = b_i - g_i(X)$, de voorwaarden (10.2) mag vervangen door

$$(10.15) \quad h_i(X) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m+n).$$

Hierbij is $h_i(X)$ concaaf, omdat $g_i(X)$ convex is.

Verder kan een probleem, waarin een convexe functie $c(X)$ moet worden geminimaliseerd, worden omgezet in een probleem, waarin een concave functie $f(X)$ moet worden gemaximaliseerd door te definiëren: $f(X) = -c(X)$.

Wij zullen van nu af aan de formulering, waarin $f(X)$ moet worden gemaximaliseerd onder bijvoorwaarden in de vorm (10.15), als standaardformulering gebruiken.

Merk op, dat een voorwaarde $x_j \geq 0$ reeds de gedaante (10.15) heeft. We zien tevens, dat problemen, waarin voorwaarden $g_i(X) = b_i$ optreden, slechts dan convexe programmeringsproblemen kunnen zijn, als de $g_i(X)$ in het toegelaten gebied lineaire functies voorstellen. Immers, slechts dan zijn zowel $h_i^+(X) = g_i(X) - b_i$ als $h_i^-(X) = -g_i(X) + b_i$ concaaf en kan $g_i(X) = b_i$ vervangen worden door $h_i^+(X) \geq 0$ en $h_i^-(X) \geq 0$.

Voor continu differentieerbare functies geldt:

STELLING 10.6. Een continu differentieerbare functie $f(X)$ is dan en slechts dan concaaf, als voor elk tweetal punten A en B geldt:

$$(10.16) \quad f(B) \leq f(A) + (B-A)' \nabla f(A).$$

BEWIJS.

a) Stel, dat $f(X)$ concaaf is. Dan is volgens definitie 10.11 voor alle A , B en $\lambda \in (0,1)$:

$$f(\lambda B + (1-\lambda)A) \geq \lambda f(B) + (1-\lambda)f(A),$$

dus

$$\frac{f(A+\lambda(B-A)) - f(A)}{\lambda} \geq f(B) - f(A).$$

Neemt men van beide leden de limiet voor $\lambda \downarrow 0$, dan vindt men door toepassing van stelling 10.1 direct (10.16).

b) Onderstel nu, dat (10.16) geldt voor elk tweetal punten. Voor de nog te kiezen vectoren X en Y geldt dan

$$f(Y) \leq f(X) + (Y-X)' \nabla f(X).$$

Wij bewijzen nu, dat f concaaf is door aan te tonen, dat aan (10.14) voldaan is voor twee willekeurige punten A en B . Hiertoe vergelijken wij de functiewaarden in A en in B met die in $(1-\lambda)A + \lambda B$. Neem eerst $Y = A$, $X = (1-\lambda)A + \lambda B$. Dan is

$$f(A) \leq f((1-\lambda)A + \lambda B) + \lambda(A-B)' \nabla f((1-\lambda)A + \lambda B).$$

$Y = B$, $X = (1-\lambda)A + \lambda B$ levert

$$f(B) \leq f((1-\lambda)A + \lambda B) - (1-\lambda)(A-B)' \nabla f((1-\lambda)A + \lambda B).$$

Vermenigvuldigen wij beide leden van deze ongelijkheden met $(1-\lambda)$, respectievelijk λ , waarbij $0 < \lambda < 1$, en tellen wij deze daarna bij elkaar op, dan is het resultaat

$$(1-\lambda)f(A) + \lambda f(B) \leq f((1-\lambda)A + \lambda B).$$

(10.14) geldt derhalve voor de willekeurig gekozen punten A en B, dus is $f(X)$ concaaf. $\square$

Een verband tussen de begrippen convexe verzameling (zie def. 3.2) en concave (convexe) functie wordt gelegd door de volgende stelling.

STELLING 10.7. *Is $f(X)$ een concave (convexe) functie, dan vormen de punten X , die voldoen aan $f(X) \geq 0$ ($f(X) \leq 0$) een convexe verzameling.*

BEWIJS. Is $f(X)$ concaaf, dan moeten we bewijzen, dat voor elk tweetal punten A en B met $f(A) \geq 0$ en $f(B) \geq 0$, bij elke $\lambda \in (0,1)$ geldt:

$$f((1-\lambda)A + \lambda B) \geq 0.$$

Dit volgt direct uit (10.4):

$$f((1-\lambda)A + \lambda B) \geq (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B) \geq 0.$$

Voor f convex verloopt het bewijs analoog. $\square$

Uit stelling 10.7 volgt

STELLING 10.8. *Het toegelaten gebied X van probleem (10.1), (10.2) is convex.*

BEWIJS. Voor twee willekeurige punten $A \in X$ en $B \in X$ geldt, dat $h_i(A) \geq 0$ en $h_i(B) \geq 0$ voor $i = 1, \dots, m+n$. Voor een willekeurige $\lambda \in (0,1)$ geldt dan echter ook $h_i((1-\lambda)A + \lambda B) \geq 0$ voor $i = 1, \dots, m+n$. $\square$

Evenals de simplexmethode tasten de meeste algoritmen voor convexe programmering de omgeving van de vector X , die men in een bepaalde stap heeft bereikt, af. Men stopt de berekeningen als blijkt dat men in deze omgeving geen

betere waarden meer kan vinden. In principe bereikt men dus steeds een lokaal extreem en het kan dan van belang zijn te weten of dit ook een globaal extreem is. Stelling 10.9 geeft hierover voor een bepaald geval uitsluitel.

STELLING 10.9. *Een lokaal maximum van een concave functie $f(X)$, gedefinieerd op een convexe verzameling, is een globaal maximum van deze functie.*

BEWIJS. Stel het lokaal maximum wordt bereikt in A en is gelijk aan m . Als dit geen globaal maximum is, dan is er een B die behoort tot de convexe verzameling, zodanig, dat $f(B) > f(A)$, dus $f(B) > m$. Daar de verzameling convex is, behoort ook ieder punt $(1-\lambda)A + \lambda B$ ($0 < \lambda < 1$) er toe. Aangezien $f(X)$ een concave functie is, geldt voor al deze punten

$$f((1-\lambda)A + \lambda B) \geq (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B),$$

of, wegens $f(A) = m$ en $f(B) > m$

$$f((1-\lambda)A + \lambda B) > m.$$

Met andere woorden, er is in iedere ε -omgeving van A een punt waarvoor de functiewaarde groter is dan m , zodat A geen lokaal maximum kan zijn. Hieruit volgt dat er geen punt B met $f(B) > m$ bestaat en dus heeft $f(X)$ in A een globaal maximum. $\square$

Op analoge wijze kan worden bewezen dat een lokaal minimum van een convexe functie, die gedefinieerd is op een convexe verzameling een globaal minimum van deze functie geeft.

Passen we de algoritmen uit de convexe programmering toe op een probleem waarin aan de in stelling 10.9 gestelde eisen is voldaan, dan vinden we dus een globaal extreem. Is $f(X)$ echter niet concaaf, dan leveren sommige algoritmen een relatief maximum op, andere leiden in het geheel niet tot een zinvol resultaat.

Ter verduidelijking van de betekenis van stelling 10.9 zijn in de figuren 10.7 t/m 10.10 voor het 2-dimensionale geval enige mogelijke situaties geschetst, die bij niet-convexe programmeringsproblemen kunnen optreden. Het toegelaten gebied X is hierbij aangegeven met getrokken lijnen. Stippellijnen stellen lijnen met $f(X) = \text{constant}$ voor. De pijltjes geven de richting aan, waarin een lijn $f(X) = c$ verschoven wordt bij toename van c .

Bij de globale maxima is overal een M geschreven, terwijl de lokale maxima zijn aangeduid met andere hoofdletters.

In figuur 10.6 is een geval getekend met $f(X)$ concaaf en X convex. In overeenstemming met stelling 10.9 is er buiten het globale maximum, dat bereikt wordt in M, geen lokaal maximum met een lagere waarde van de criteriumfunctie.

In de figuren 10.7, 10.8 en 10.9 komen verschillende maxima voor, terwijl figuur 10.10 toont, dat het heel wel mogelijk is, dat een probleem, waarvoor $f(X)$ niet concaaf is en X niet convex, toch slechts één lokaal maximum bezit.

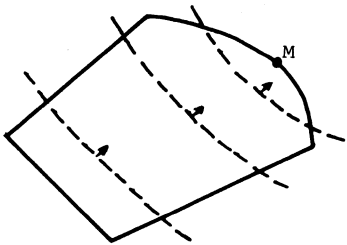


fig. 10.6

X convex, criteriumfunctie concaaf

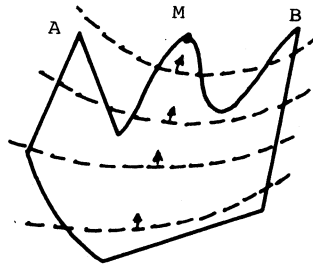


fig. 10.7

X niet convex, criteriumfunctie concaaf

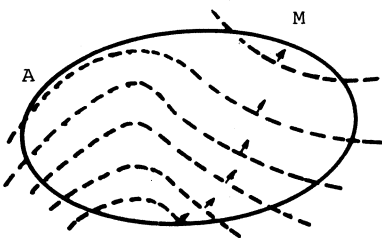


fig. 10.8

X convex, criteriumfunctie niet concaaf

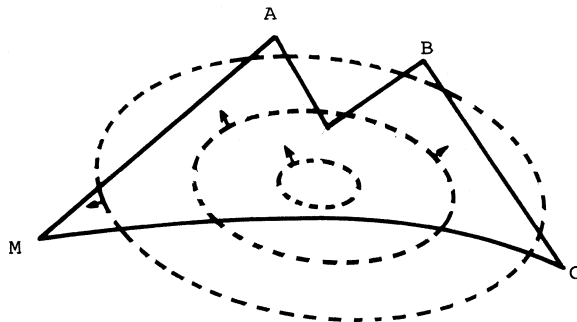


fig. 10.9

X niet convex, criteriumfunctie niet concaaf

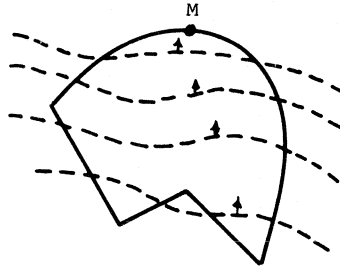


fig. 10.10

X niet convex, criteriumfunctie niet concaaf

Van belang is nog de volgende stelling.

STELLING 10.10. *Is $f(x)$ een concave functie en is $f(x_1) > f(x_0)$, dan geldt*

$$(10.17) \quad (x_1 - x_0)' \nabla f(x_0) > 0.$$

BEWIJS. Daar $f(x)$ concaaf is, geldt volgens stelling 10.6

$$f(x_1) \leq f(x_0) + (x_1 - x_0)' \nabla f(x_0).$$

Was nu niet aan (10.17) voldaan, dan volgde hieruit direct $f(x_1) \leq f(x_0)$, hetgeen in strijd is met het gegeven. $\square$

Het zal na het bovenstaande duidelijk zijn, dat het belangrijk is over criteria te beschikken, waarmee men na kan gaan, of een functie convex, concaaf of geen van beide is.

Definitie 10.11 en stelling 10.6 zijn hiervoor niet geschikt. We geven dan ook een ander criterium waarbij gebruik wordt gemaakt van eigenschappen van symmetrische matrices. Ter inleiding herhalen we enkele definities uit deel 1 van deze leergang.

DEFINITIE 10.12. Een symmetrische matrix C is *positief definit* als voor iedere $x \neq 0$ geldt: $x'Cx > 0$ en *positief semidefinit* als voor iedere $x \neq 0$ geldt: $x'Cx \geq 0$.

DEFINITIE 10.13. Een symmetrische matrix C is *negatief definit* als voor iedere $x \neq 0$ geldt: $x'Cx < 0$ en *negatief semidefinit* als voor iedere $x \neq 0$ geldt: $x'Cx \leq 0$.

OPMERKING 10.3. Uit deze definities volgt, dat als een matrix C positief definit is, $-C$ negatief definit is.

DEFINITIE 10.14. Een symmetrische matrix C is *indefinit*, als er tenminste één paar vectoren X en Y bestaat, zodanig, dat $X'CX > 0$ en $Y'CY < 0$.

We zullen de gegeven definities toelichten aan de hand van enkele voorbeelden.

VOORBEELD 10.1. Ga na aan welke van de definities 10.12 t/m 10.14 de volgende matrices voldoen.

$$\text{a) } C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } C_4 = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

We onderzoeken telkens de kwadratische vormen $X'CX$.

ad a)

$$X'C_1X = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

Voor iedere $X \neq 0$ blijkt $X'C_1X > 0$ te zijn; dus is C_1 positief definit.

ad b)

$X'C_2X = (x_1 + x_2 + x_3)^2$. Nu is $X'C_2X \geq 0$, want voor $X \neq 0$ kan de waarde van $X'C_2X$ nul zijn (bijvoorbeeld voor $X' = (0, 2, -2)$). C_2 is dan ook positief semidefiniet.

ad c)

$X'C_3X = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, welke vorm zowel positief als negatief kan zijn, zodat C_3 indefinit is.

ad d)

$X'C_4X = 5x_1^2 - 12x_1x_2 + 4x_1x_3 + 9x_2^2 - 6x_2x_3 + x_3^2$. Om na te gaan, of deze vorm positieve en/of negatieve waarden kan aannemen, zullen wij trachten haar te schrijven als som of verschil van kwadraten, eventueel vermenigvuldigd met getallen. We vinden:

$$\begin{aligned}
x' C x &= 5 \left(x_1^2 - \frac{12}{5} x_1 x_2 + \frac{4}{5} x_1 x_3 + \frac{9}{5} x_2^2 - \frac{6}{5} x_2 x_3 + \frac{1}{5} x_3^2 \right) \\
&= 5 \left\{ \left(x_1 - \frac{6}{5} x_2 + \frac{2}{5} x_3 \right)^2 + \frac{9}{25} x_2^2 - \frac{6}{25} x_2 x_3 + \frac{1}{25} x_3^2 \right\} \\
&= 5 \left(x_1 - \frac{6}{5} x_2 + \frac{2}{5} x_3 \right)^2 + \frac{1}{5} (3x_2 - x_3)^2.
\end{aligned}$$

C_4 is dus positief semidefiniet, want $x' C_4 x \geq 0$, en $x' C_4 x = 0$ voor $x = (0, 1, 3)'$.

In de praktijk zal men bij het onderzoek naar de zojuist beschreven eigenschappen van een matrix een computer inschakelen. Een efficiënte methode, die dan gevolgd kan worden, komt er op neer, dat de kwadratische vorm zo getransformeerd wordt, dat een uitdrukking van de gedaante

$$\sum_{j=1}^n p_j \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \right)^2$$

ontstaat. (Dit is de methode, die gevolgd is bij het onderzoek van C_4 .) Zijn alle $p_j \geq 0$ (≤ 0), dan is de matrix positief (negatief) (semi-) definit. Heeft het stelsel

$$\sum_{k=j}^n a_{jk} x_k = 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

een oplossing $x \neq 0$, dan is de matrix semi-definit. Zijn sommige $p_j > 0$ en andere $p_j < 0$ dan is de matrix indefinit.

We gaan nu over tot de behandeling van een eigenschap, waarmee kan worden onderzocht, of een functie $f(x)$ concaaf (respectievelijk convex) is. We veronderstellen, dat $f(x)$ in het bezit is van continue tweede afgeleiden.

STELLING 10.11. *Een functie $f(x)$, die continue partiële afgeleiden van de tweede orde bezit, is dan en slechts dan concaaf (convex), als voor iedere x de matrix van HESSE, $H_f(x)$, negatief (positief) semidefiniet is.*

BEWIJS. We geven het bewijs alleen voor het concave geval. Het convexe geval is op analoge wijze te bewijzen.

We maken gebruik van de stelling van TAYLOR in de vorm (10.11). Voor tweemaal differentieerbare functies geldt, dat voor iedere x en iedere $x+s$ er een getal $\tau \in [0, 1]$ te vinden is, zodanig, dat

$$(10.18) \quad f(X+S) = f(X) + S' \nabla f(X) + \frac{1}{2} S' H_f(X+\tau S) S.$$

Als $H_f(X)$ negatief semidefiniet is voor alle X , volgt uit (10.18) onmiddellijk

$$(10.19) \quad f(X+S) \leq f(X) + S' \nabla f(X)$$

voor alle X en S , $S \neq 0$. Volgens stelling 10.6 is $f(X)$ dan concaaf.

Stel nu omgekeerd, dat $f(X)$ concaaf is, zodat (10.19) geldt voor alle X en S , $S \neq 0$. Neem nu aan, dat H_f niet negatief semidefiniet is voor zekere X . Dan komen wij tot een tegenspraak. Immers, er was dan een S te vinden, waarvoor gold:

$$S' H_f(X) S > 0,$$

en dit blijft gelden, als we S dezelfde richting laten behouden, maar zijn lengte verkleinen. Wegens de continuïteit van de tweede afgeleiden is er dan een positief getal ε te vinden, zodanig, dat voor $|S| < \varepsilon$ geldt:

$$S' H_f(X+\tau S) S > 0$$

voor alle $\tau \in [0,1]$. Bij deze lengte van S geldt dan volgens (10.18):

$$f(X+S) > f(X) + S' \nabla f(X),$$

waarmee de tegenspraak bereikt is. $\square$

VOORBEELD 10.2. We willen de convexiteitseigenschappen onderzoeken van de functie

$$f(X) = e^{\sum_{j=1}^n a_j x_j}.$$

Hiervoor geldt:

$$H_f(X) = e^{\sum_{j=1}^n a_j x_j} \cdot Q,$$

waarbij

$$Q = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_n a_1 & \dots & \dots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

Omdat $e \sum_{j=1}^n a_j x_j > 0$ voor elke X , behoeven we slechts na te gaan, of Q positief of negatief (semi-) definit is. Is nu $Y' = (y_1, \dots, y_n)$, dan is $Y'QY = \left(\sum_{j=1}^n a_j y_j \right)^2$, zodat steeds $Y'QY \geq 0$ en $Y'QY = 0$ voor alle Y , die voldoen aan $\sum_{j=1}^n a_j x_j = 0$. De matrix $H_f(X)$ is dus positief semidefinit voor elke X , zodat $f(X)$ convex is, maar niet strikt convex.

Dat $f(X) = e \sum_{j=1}^n a_j x_j$ convex is, hadden we ook kunnen bewijzen door de volgende stelling toe te passen.

STELLING 10.12. *Is $g(X)$ een convexe (concaave) functie en $f(t)$ convex (concaaf) en monotoon niet dalend, dan is ook de functie $f(g(X))$ convex (concaaf).*

BEWIJS. We geven het bewijs voor f en g convex. Het bewijs voor het andere geval verloopt analoog.

Beschouw twee willekeurige punten A en B . Omdat $g(X)$ convex is, is voor elke $\lambda \in [0,1]$

$$g((1-\lambda)A + \lambda B) \leq (1-\lambda)g(A) + \lambda g(B).$$

Wegens de eigenschap, dat $f(t)$ monotoon niet dalend en convex is, geldt:

$$\begin{aligned} (10.20) \quad f(g((1-\lambda)A + \lambda B)) &\leq f((1-\lambda)g(A) + \lambda g(B)) \\ &\leq (1-\lambda)f(g(A)) + \lambda f(g(B)), \end{aligned}$$

zodat $f(g(X))$ convex is. $\square$

We besluiten deze paragraaf met de behandeling van twee stellingen over lineaire ongelijkheden, waarvan wij in paragraaf 11 bij de bewijzen gebruik zullen maken.

Lineaire ongelijkheden

Beschouw het stelsel ongelijkheden

$$(10.21) \quad \sum_{j=1}^n e_{ij} x_j \leq f_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

Als dit stelsel een oplossing $x_j = x_{j0}$ ($j = 1, \dots, n$) bezit, voldoet deze ook aan elke niet negatieve lineaire combinatie van de ongelijkheden (10.21), dus aan

$$(10.22) \quad \sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^n e_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^m y_i f_i,$$

waarin

$$(10.23) \quad y_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Heeft men de getallen y_i ($i = 1, \dots, m$) zo kunnen kiezen, dat geldt

$$(10.24) \quad \sum_{i=1}^m y_i e_{ij} = 0 \quad (j = 1, \dots, n),$$

dan gaat (10.22) over in

$$(10.25) \quad 0 \leq \sum_{i=1}^m y_i f_i.$$

Kan men echter getallen y_i kiezen, die voldoen aan (10.23), (10.24) en

$$(10.26) \quad \sum_{i=1}^m y_i f_i < 0,$$

dan bestaan er bij het stelsel (10.21) niet negatieve coëfficiënten y_i , zodanig, dat niet aan (10.22) voldaan is, hetgeen tot de conclusie leidt, dat stelsel (10.21) strijdig is.

Past men een overeenkomstige redenering toe op het stelsel

$$(10.27) \quad \sum_{j=1}^n e_{ij} x_j < f_i \quad (i = 1, \dots, m),$$

waarbij men alleen coëfficiënten $y_1, \dots, y_m$ toelaat, die ≥ 0 zijn, maar niet alle gelijk aan 0, dan vindt men in de plaats van (10.25) een ongelijkheid met een kleiner teken. Men kan dan tot strijdigheid komen als men y_i -waarden ≥ 0 kan vinden, die voldoen aan (10.23), (10.24) en

$$(10.28) \quad \sum_{i=1}^m y_i f_i \leq 0,$$

en waarin tenminste één y_i -waarde > 0 is.

Het stelsel

$$(10.29) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^n e_{ij} x_j &< f_i & (i = 1, \dots, q) \\ \sum_{j=1}^n e_{ij} x_j &\leq f_i & (i = q+1, \dots, m) \end{aligned}$$

is strijdig, indien òf y_i gevonden kunnen worden die voldoen aan (10.23), (10.24) en (10.26), òf y_i die voldoen aan (10.23), (10.24) en (10.28), waarbij $y_{q+1} = \dots = y_m = 0$ en $y_i > 0$ voor tenminste één van de indices $i = 1, \dots, q$.

De volgende stelling zegt nu, dat men ook omgekeerd bij elk stelsel (10.29), dat strijdig is, getallen y_i kan vinden, die aan één van de zojuist geformuleerde eisen voldoen.

STELLING 10.13. *Het stelsel (10.29) is dan en slechts dan strijdig, indien er getallen y_i zijn, die voldoen òf aan (10.23), (10.24) en (10.26) òf aan (10.23), (10.24) en (10.28), waarbij voor tenminste één index i ($i = 1, \dots, q$) geldt, dat $y_i > 0$ is en $y_i = 0$ voor $i = q+1, \dots, m$.*

BEWIJS. Na het bovenstaande behoeven we nog slechts het tweede deel van de stelling te bewijzen.

Wij geven het bewijs eerst voor het geval $q = 0$ en laten daarna zien, dat het bewijs voor $q > 0$ op analoge wijze gegeven kan worden. Wanneer $q = 0$ is het stelsel (10.29) identiek met het stelsel (10.21). Wij bewijzen dus, dat (10.23), (10.24) en (10.26) een oplossing bezitten, als (10.21) strijdig is.

Indien rij r van de e_{ij} -coëfficiëntenmatrix geheel uit nullen bestaat en $f_r \geq 0$ is, dan wordt deze rij verder buiten beschouwing gelaten. Is $f_r < 0$, dan is (10.21) strijdig. Een oplossing van het stelsel (10.23), (10.24) en (10.26) is dan $y_r = 1$, $y_i = 0$, $i \neq r$. Voor de andere gevallen bewijzen we de stelling met volledige inductie naar het aantal variabelen. We beschouwen eerst het geval $n = 1$.

Definieer

$$M_1^+ = \{i \mid e_{i1} > 0\}$$

$$M_1^- = \{i \mid e_{i1} < 0\}.$$

We kunnen dan het stelsel (10.21) herschrijven tot

$$(10.30) \quad \begin{aligned} x_1 &\leq \frac{f_i}{e_{i1}} & (i \in M_1^+) \\ x_1 &\geq \frac{f_i}{e_{i1}} & (i \in M_1^-). \end{aligned}$$

Indien een x_1 -waarde gevonden kan worden, die voor alle $\ell \in M_1^-$ en alle $u \in M_1^+$ voldoet aan

$$(10.31) \quad \frac{f_\ell}{e_{\ell 1}} \leq x_1 \leq \frac{f_u}{e_{u1}} \quad (\ell \in M_1^-, u \in M_1^+),$$

is het stelsel (10.21) niet strijdig. Wegens onze aanname, dat (10.21) wel strijdig is, moet dus ook het stelsel

$$(10.32) \quad \frac{f_\ell}{e_{\ell 1}} \leq \frac{f_u}{e_{u1}} \quad (\ell \in M_1^-, u \in M_1^+)$$

strijdig zijn. Er moeten dan tenminste één index $\ell_0 \in M_1^-$ en één index $u_0 \in M_1^+$ te vinden zijn, zodanig, dat

$$(10.33) \quad \frac{f_{u_0}}{e_{u_0 1}} < \frac{f_{\ell_0}}{e_{\ell_0 1}}.$$

Kies nu $y_{u_0} = -e_{\ell_0 1}$, $y_{\ell_0} = e_{u_0 1}$, $y_i = 0$, $i \neq u_0, \ell_0$. Dan is voldaan aan (10.23), (10.24) en (10.26), omdat $-e_{\ell_0 1} > 0$, $e_{u_0 1} > 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m y_i e_{i1} &= y_{u_0} e_{u_0 1} + y_{\ell_0} e_{\ell_0 1} \\ &= -e_{\ell_0 1} e_{u_0 1} + e_{u_0 1} e_{\ell_0 1} = 0 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m y_i f_i &= y_{u_0} f_{u_0} + y_{\ell_0} f_{\ell_0} = \\
&= -e_{\ell_0 1} f_{u_0} + e_{u_0 1} f_{\ell_0} = -e_{\ell_0 1} e_{u_0 1} \left(\frac{f_{u_0}}{e_{u_0 1}} - \frac{f_{\ell_0}}{e_{\ell_0 1}} \right) < 0.
\end{aligned}$$

Neem nu aan, dat de stelling geldt voor willekeurige m , en $n = 1, \dots, k-1$. Wij bewijzen, dat zij dan ook geldt voor $n = k$. Daartoe vatten wij

$$(10.34) \quad \sum_{j=1}^k e_{ij} x_j \leq f_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

op als een stelsel ongelijkheden in x_k . We definiëren

$$M_k^+ = \{i \mid e_{ik} > 0\}$$

$$M_k^- = \{i \mid e_{ik} < 0\}$$

$$M_k^0 = \{i \mid e_{ik} = 0\}.$$

Indien het stelsel

$$(10.35) \quad \sum_{j=1}^{k-1} e_{ij} x_j \leq f_i \quad (i \in M_k^0)$$

strijdig is, passen we hierop stelling 10.13 toe met $n = k-1$. Er bestaat dan een oplossing $y_i = y_{i0}$ van (10.23), (10.24) en (10.26) met $n = k-1$ en $i \in M_k^0$. Kiezen we nu $y_i = y_{i0}$ voor $i \in M_k^0$ en $y_i = 0$ voor $i \in M_k^+ \cup M_k^-$, dan hebben we voor $n = k$ en $i = 1, \dots, m$ een oplossing gevonden, die aan (10.23), (10.24) en (10.26) voldoet. Voor deze situatie is hiermee het bewijs van de inductiestap geleverd.

Neem nu aan, dat (10.35) een niet strijdig stelsel weergeeft. Er kunnen dan wegens de strijdigheid van (10.34) geen x_j -waarden ($j = 1, \dots, k-1$) gevonden worden, die voldoen aan (10.35), zodanig, dat er een x_k -waarde te vinden is die voldoet aan

$$\frac{f_{\ell} - \sum_{j=1}^{k-1} e_{\ell j} x_j}{e_{\ell k}} \leq x_k \leq \frac{f_u - \sum_{j=1}^{k-1} e_{uj} x_j}{e_{uk}} \quad (\ell \in M_k^-, u \in M_k^+);$$

(vgl. (10.31)).

Het stelsel

$$\sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{e_{uj}}{e_{uk}} - \frac{e_{lj}}{e_{lk}} \right) x_j \leq \frac{f_u}{e_{uk}} - \frac{f_l}{e_{lk}} \quad (\ell \in M_k^-, u \in M_k^+)$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} e_{ij} x_j \leq f_i \quad (i \in M_k^0)$$

in $k-1$ variabelen is dus strijdig. Volgens stelling 10.13 voor $n = k-1$ bestaat er dan een oplossing $y_{\ell u 0}$ ($\ell \in M_k^-$, $u \in M_k^+$), $y_{i 0}$ ($i \in M_k^0$) van het stelsel

$$(10.36) \quad y_{\ell u} \geq 0 \quad (\ell \in M_k^-, u \in M_k^+)$$

$$(10.37) \quad y_i \geq 0 \quad (i \in M_k^0)$$

$$(10.38) \quad \sum_{\ell \in M_k^-} \sum_{u \in M_k^+} y_{\ell u} \left(\frac{e_{uj}}{e_{uk}} - \frac{e_{lj}}{e_{lk}} \right) + \sum_{i \in M_k^0} y_i e_{ij} = 0 \quad (j = 1, \dots, k-1)$$

$$(10.39) \quad \sum_{\ell \in M_k^-} \sum_{u \in M_k^+} y_{\ell u} \left(\frac{f_u}{e_{uk}} - \frac{f_l}{e_{lk}} \right) + \sum_{i \in M_k^0} y_i f_i < 0.$$

Definiëren we nu

$$(10.40) \quad y_{\ell 0} = \frac{\sum_{u \in M_k^+} y_{\ell u 0}}{-e_{\ell k}} \quad (\ell \in M_k^-)$$

$$(10.41) \quad y_{u 0} = \frac{\sum_{\ell \in M_k^-} y_{\ell u 0}}{e_{uk}} \quad (u \in M_k^+),$$

dan vormen deze samen met de reeds gevonden $y_{i 0}$ ($i \in M_k^0$) een oplossing voor (10.23), (10.24), (10.26) met $n = k$. Immers, volgens (10.36), (10.40) en (10.41) geldt

$$y_{\ell 0} \geq 0 \quad (\ell \in M_k^-)$$

$$y_{u 0} \geq 0 \quad (u \in M_k^+),$$

en deze ongelijkheden vormen met (10.37) voor $y_i = y_{i0}$ ($i \in M_k^0$) juist (10.23) voor $y_i = y_{i0}$, ($i = 1, \dots, m$).

Verder volgt uit (10.38) onmiddellijk

$$\sum_{\ell \in M_k^-} y_{\ell 0} e_{\ell j} + \sum_{u \in M_k^+} y_{u0} e_{uj} + \sum_{i \in M_k^0} y_{i0} e_{ij} = 0 \quad (j = 1, \dots, k-1)$$

en is wegens (10.40) en (10.41)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m y_{i0} e_{ik} = \\ &= \sum_{\ell \in M_k^-} \frac{\sum_{u \in M_k^+} y_{\ell u0}}{-e_{\ell k}} e_{\ell k} + \sum_{u \in M_k^+} \frac{\sum_{\ell \in M_k^-} y_{\ell u0}}{e_{uk}} + \sum_{i \in M_k^0} y_{i0} \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

zodat aan (10.24) is voldaan. Substitutie van (10.40) en (10.41) in (10.39) levert tenslotte

$$\sum_{\ell \in M_k^-} y_{\ell 0} f_{\ell} + \sum_{u \in M_k^+} y_{u0} f_u + \sum_{i \in M_k^0} y_{i0} f_i < 0,$$

dus geldt (10.26).

Ook voor de situatie, dat (10.35) niet strijdig is, is hiermee het bewijs van de inductiestap geleverd.

We hebben nu de stelling bewezen voor $q = 0$. Indien $q = m$ verloopt het bewijs analoog. Een strikt ongelijkheidsteken ($<$ of $>$) vervangt hierbij steeds een ongelijkheidsteken ($\leq$ of $\geq$) en omgekeerd. Het bewijs voor $0 < q < m$ wordt verkregen door een combinatie van deze beide bewijzen. $\square$

Verschillende stellingen uit de theorie van de convexe programmering kunnen worden bewezen door gebruik te maken van stelling 10.13 of van andere stellingen, die er nauw mee verwant zijn. De bekendste hiervan is in 1901 bewezen door J. FARKAS en kan als volgt worden geformuleerd.

STELLING 10.14 (lemma van FARKAS). *Gegeven zijn een willekeurige $m \times n$ -matrix A en een willekeurige n -dimensionale vector c . Nu geldt dan en slechts dan voor iedere x , die voldoet aan*

$$(10.42) \quad Ax \geq 0,$$

dat

$$(10.43) \quad C'x \leq 0,$$

als er een m -dimensionale vector T bestaat, die voldoet aan

$$(10.44) \quad \begin{aligned} T'A + C' &= 0 \\ T &\geq 0. \end{aligned}$$

BEWIJS. Als een vector T aan (10.44) voldoet, geldt voor elke X , die aan (10.42) voldoet

$$(10.45) \quad C'x = -T'Ax \leq 0,$$

waarmee het eerste deel van de stelling bewezen is.

Volgt omgekeerd uit $Ax \geq 0$, dat $C'x \leq 0$, dan is het stelsel

$$(10.46) \quad \begin{aligned} -Ax &\leq 0 \\ -C'x &< 0 \end{aligned}$$

strijdig. Volgens stelling 10.13 zijn er dan een vector y_0 en een getal y_0 te vinden, die voldoen aan

$$(10.47) \quad \begin{aligned} -y_0' A - y_0 C' &= 0 \\ y_0 &\geq 0 \\ y_0 &\geq 0. \end{aligned}$$

Omdat alle rechter leden van (10.46) gelijk zijn aan nul, moet van stelling 10.13 het tweede gedeelte worden toegepast ((10.23), (10.24) en (10.28)), zodat $y_0 > 0$ moet zijn. Uit (10.47) volgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{y_0} y_0' A + C' &= 0 \\ \frac{1}{y_0} y_0 &\geq 0. \end{aligned}$$

Kiezen we nu $T = \frac{1}{y_0} y_0$, dan is stelling 10.14 bewezen. $\square$

11. DE STELLING VAN KUHN EN TUCKER; DUALITEIT

In §10 is aangetoond, dat men elk convex programmeringsprobleem zodanig kan formuleren dat gevraagd wordt een functie

$$(11.1) \quad y = f(x)$$

te maximaliseren onder de voorwaarden

$$(11.2) \quad h_i(x) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m+n).$$

De stelling van KUHN en TUCKER^{*)} geeft nodige en voldoende voorwaarden, opdat in $x = \bar{x}$ het maximum van (11.1) onder de restricties (11.2) wordt bereikt. Deze voorwaarden zijn enerzijds theoretisch interessant, anderzijds leiden zij tot numerieke oplossingsmethoden. We leiden in deze paragraaf de resultaten van KUHN en TUCKER af in een enigszins vereenvoudigde vorm.

Wij voeren eerst enige notaties in. De verzameling van de indices $i = 1, \dots, m+n$ noemen we I . De verzameling van de indices $i \in I$ van de functies $h_i(x)$, die geschreven kunnen worden in de gedaante $e_{i0} + \sum_{j=1}^n e_{ij} x_j$, geven we weer door I_1 en de verzameling van de overige indices $i \in I$ door I_c .

Beschouwen we verder een punt x_0 van het toegelaten gebied, dan maken we onderscheid tussen de *actieve restricties*, d.w.z. de restricties waarvoor geldt $h_i(x_0) = 0$, en de *inactieve restricties*, waarvoor $h_i(x_0) > 0$. We definiëren nu

$$I(x_0) = \{i \mid i \in I \wedge h_i(x_0) = 0\},$$

$$I_1(x_0) = I_1 \cap I(x_0)$$

en

$$I_c(x_0) = I_c \cap I(x_0).$$

*) H.W. KUHN & A.W. TUCKER, *Non-linear Programming*, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (1950), blz. 481-492; herdrukt in: *Readings in Mathematical Economics*, vol. I, ed. by P. NEWMAN, The Johns Hopkins Press, Baltimore (1968), blz. 3-14.

De volgende stelling geldt.

STELLING 11.1. *Bij een toegelaten richting S_0 in een punt $x_0 \in X$ is*

$$(11.3) \quad S_0' \nabla h_i(x_0) \geq 0$$

voor alle i , waarvoor $h_i(x_0) = 0$.

BEWIJS. Wegens definitie 10.9 bestaat er een positief getal δ met de eigenschap, dat $x_0 + \lambda S_0 \in X$ voor $\lambda \in (0, \delta]$. Voor deze waarden van λ geldt

$$h_i(x_0 + \lambda S_0) \geq 0 \quad (i \in I).$$

Voor $i \in I(x_0)$ is dan

$$\frac{h_i(x_0 + \lambda S_0) - h_i(x_0)}{\lambda} = \frac{h_i(x_0 + \lambda S_0)}{\lambda} \geq 0 \quad (i \in I(x_0))$$

voor alle $\lambda \in (0, \delta]$. Hieruit volgt, dat

$$S_0' \nabla h_i(x_0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{h_i(x_0 + \lambda S_0) - h_i(x_0)}{\lambda} \geq 0 \quad (i \in I(x_0)). \quad \square$$

Meetkundig gezien komt de bewering van de stelling hier op neer, dat elke toegelaten richting S_0 in een toegelaten punt x_0 niet-stompe hoeken maakt met de gradiënten van de actieve restricties in x_0 .

Een mogelijke situatie in $\mathbb{R}^2$ wordt weergegeven door figuur 11.1. Hier is $I = \{1, 2, 3\}$, $I(x_0) = \{1, 2\}$. De toegelaten richtingen zijn vectoren vanuit x_0 naar een punt van het toegelaten gebied. De richtingen S , die aan (11.3) voldoen, zijn al die vectoren, waarvan het eindpunt ligt in het gestippelde gebied.

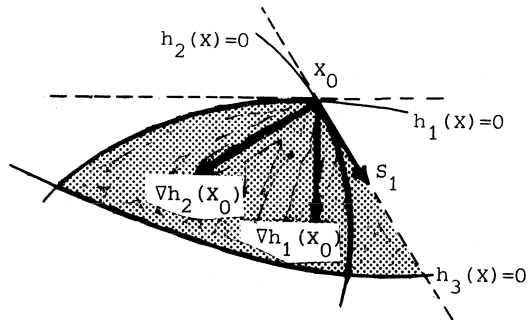


fig. 11.1

Toelichting bij stelling 11.1

Het omgekeerde van de stelling is niet waar. De in figuur 11.1 weergegeven vector S_1 voldoet voor $x = x_0$ aan (11.3), maar stelt geen toegelaten richting in x_0 voor, want $h_2(x_0 + \lambda S_1) < 0$ voor elke $\lambda \neq 0$.

Het verband tussen het maximum van (11.1) en het bestaan van bruikbare richtingen (vergelijk definitie 10.10) wordt gelegd door de volgende stelling.

STELLING 11.2. Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde, opdat in $x = \bar{x}$ het maximum van (11.1) wordt bereikt onder de bijvoorwaarden (11.2), is, dat er in $\bar{x}$ geen bruikbare richting bestaat.

BEWIJS. Het tweede deel van de stelling is juist stelling 10.5. We behoeven dus slechts aan te tonen, dat er in een niet optimaal punt x_0 steeds een bruikbare richting bestaat.

Volgens stelling 10.8 is het toegelaten gebied X convex. Als $\bar{x}$ het werkelijke maximum is geldt wegens $x_0 \in X$ en $\bar{x} \in X$

$$x_0 + \lambda(\bar{x} - x_0) = (1-\lambda)x_0 + \lambda\bar{x} \in X$$

voor alle $\lambda \in [0,1]$. Verder is volgens stelling 10.6

$$f(\bar{x}) \leq f(x_0) + (\bar{x} - x_0)' \nabla f(x_0),$$

zodat wegens $f(x_0) < f(\bar{x})$ geldt:

$$(\bar{x} - x_0)' \nabla f(x_0) > 0.$$

$S = \bar{x} - x_0$ is dus een bruikbare richting in x_0 . $\square$

We bewijzen nu de volgende stelling.

STELLING 11.3. *Als bij een punt $\bar{x}$ zodanige getallen $\bar{t}_i$ ($i \in I$) gevonden kunnen worden, dat voldaan is aan*

$$(11.4) \quad \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{t}_i \nabla h_i(\bar{x}) = 0$$

$$(11.5) \quad h_i(\bar{x}) \geq 0 \quad (i \in I)$$

$$(11.6) \quad \bar{t}_i \geq 0 \quad (i \in I)$$

$$(11.7) \quad \sum_{i \in I} \bar{t}_i h_i(\bar{x}) = 0,$$

dan wordt in $x = \bar{x}$ het maximum van (11.1) onder de voorwaarden (11.2) bereikt.

BEWIJS. Uit (11.5) t/m (11.7) volgt, dat $\bar{t}_i = 0$, als $h_i(\bar{x}) > 0$, dus als $i \notin I(\bar{x})$. Men kan (11.4) dus vervangen door

$$(11.8) \quad \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{t}_i \nabla h_i(\bar{x}) = 0.$$

Voor een willekeurige richting S geldt dan

$$(11.9) \quad S' \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{t}_i S' \nabla h_i(\bar{x}) = 0.$$

Nu geldt volgens stelling 11.1 voor toegelaten S

$$(11.10) \quad S' \nabla h_i(\bar{x}) \geq 0 \quad (i \in I(\bar{x})),$$

zodat $S' \nabla f(\bar{x}) \leq 0$ voor alle toegelaten richtingen S in $\bar{x}$. De bewering van de stelling volgt onmiddellijk uit stelling 11.2. $\square$

Stelling 11.3 is dat deel van de stelling van KUHN en TUCKER, dat voldoende voorwaarden geeft, opdat een toegelaten punt $\bar{x}$ een optimale oplossing van een convex programmeringsprobleem is. De voorwaarden (11.4) t/m (11.7) worden de voorwaarden van KUHN en TUCKER genoemd. In het algemeen zijn ze ook noodzakelijk, doch dit kan alleen dan bewezen worden, indien het toegelaten gebied voldoet aan een zeer weinig restrictieve, zogenaamde *regulariteits-eis* (constraint qualification). Wij zullen uitgaan van de regulariteitseis van SLATER. Er bestaan ook andere regulariteitseisen.*)

REGULARITEITSEIS VAN SLATER: Het toegelaten gebied bevat tenminste één punt x_0 , dat voldoet aan

$$(11.11) \quad h_i(x_0) > 0 \quad (i \in I_c).$$

STELLING 11.4. *Is $\bar{x}$ een optimale oplossing van het convexe programmeringsprobleem, dan geldt onder de regulariteitseis van SLATER voor alle vectoren, die voldoen aan*

$$(11.12) \quad s' \nabla h_i(\bar{x}) \geq 0 \quad (i \in I(\bar{x}))$$

ook

$$(11.13) \quad s' \nabla f(\bar{x}) \leq 0.$$

BEWIJS. Stel, dat er een s_0 bestaat, die aan (11.12) voldoet, maar waarvoor

$$(11.14) \quad s_0' \nabla f(\bar{x}) > 0.$$

Verder weten wij dat er een punt x_0 bestaat, zodanig dat $h_i(x_0) > 0$ ($i \in I_c$). We bereiken dan een tegenspraak door het construeren van een toegelaten richting $(\tau) = x_0 - \bar{x} + \tau s_0$ in $\bar{x}$, die bruikbaar is voor τ voldoende groot positief. Daar x_0 en $\bar{x}$ vaste punten zijn volgt uit

$$s'(\tau) \nabla f(\bar{x}) = (x_0 - \bar{x})' \nabla f(\bar{x}) + \tau s_0' \nabla f(\bar{x})$$

en (11.14), dat er een positief getal τ_0 bestaat zodanig, dat

*) Vgl. O.L. MANGASARIAN, *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York (1969), blz. 78 e.v., blz. 101 e.v.

$S'(\tau) \nabla f(\bar{X}) > 0$ voor $\tau \geq \tau_0$. We kiezen $\bar{\tau} \geq \tau_0$.

Op de volgende wijze ziet men in, dat $S(\bar{\tau})$ een toegelaten richting is.

Voor $i \in I_c(\bar{X})$ is wegens de definities van $I_c(\bar{X})$ en de richtingsafgeleide (definitie 10.8)

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(h_i(\bar{X} + \lambda S(\bar{\tau})) - h_i(\bar{X}))}{\lambda} = S'(\bar{\tau}) \nabla h_i(\bar{X}).$$

Toepassing van (11.12) op S_0 en stelling 10.6 leidt tot

$$\begin{aligned} S'(\bar{\tau}) \nabla h_i(\bar{X}) &= (X_0 - \bar{X})' \nabla h_i(\bar{X}) + \bar{\tau} S_0' \nabla h_i(\bar{X}) \\ &\geq (X_0 - \bar{X})' \nabla h_i(\bar{X}) \\ &\geq h_i(X_0) - h_i(\bar{X}) \quad (i \in I_c(\bar{X})) \\ &= h_i(X_0) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Er bestaat dus een getal $\lambda_1 > 0$ zodanig, dat $h_i(\bar{X} + \lambda S(\bar{\tau})) > 0$ ($i \in I_c(\bar{X})$) voor $\lambda \in (0, \lambda_1]$.

Voor $i \in I_1(\bar{X})$ kan men $h_i(X)$ schrijven als

$$h_i(X) = e_{i0} + \sum_{j=1}^n e_{ij} x_j.$$

Er geldt dan

$$\begin{aligned} h_i(\bar{X} + \lambda S(\bar{\tau})) &= h_i(\bar{X} + \lambda(X_0 - \bar{X} + \bar{\tau} S_0)) = \\ &= e_{i0} + \sum_{j=1}^n e_{ij} \bar{x}_j + \lambda \{ (e_{i0} + \sum_{j=1}^n e_{ij} x_{j0}) - \\ &\quad - (e_{i0} + \sum_{j=1}^n e_{ij} \bar{x}_j) \} + \lambda \bar{\tau} \sum_{j=1}^n e_{ij} s_{j0} \\ &= 0 + \lambda \{ (e_{i0} + \sum_{j=1}^n e_{ij} x_{j0}) - 0 \} + \lambda \bar{\tau} \sum_{j=1}^n e_{ij} s_{j0} \\ &= \lambda h_i(X_0) + \lambda \bar{\tau} S_0' \nabla h_i(\bar{X}) \geq 0. \end{aligned}$$

Voor $i \in I - I_c(\bar{X}) - I_1(\bar{X})$ is er wegens de continuïteit van $h_i(X)$ en wegens $h_i(\bar{X}) > 0$ een getal $\lambda_2 > 0$ te vinden zodanig, dat

$$h_i(\bar{X} + \lambda S(\bar{\tau})) \geq 0$$

voor $\lambda \in (0, \lambda_2]$.

Uit het bovenstaande volgt, dat voor $\lambda \in (0, \min(\lambda_1, \lambda_2)]$ het punt $\bar{X} + \lambda S(\bar{\tau})$ tot X behoort, zodat $S(\bar{\tau})$ een toegelaten richting is. Daar tevens $S(\bar{\tau}) \nabla f(\bar{X}) > 0$, kan $\bar{X}$ volgens stelling 11.2 niet optimaal zijn. Dit is in strijd met het gegeven, dus kan er in $\bar{X}$ geen S_0 bestaan, die voldoet aan (11.12), maar niet aan (11.13). $\square$

STELLING 11.5. *Indien het maximum van (11.1) onder de voorwaarden (11.2) wordt bereikt in een punt $\bar{X}$ en er een toegelaten punt x_0 bestaat, dat voldoet aan (11.11), kunnen zodanige getallen $\bar{t}_i$ gevonden worden, dat $\bar{X}$ en $\bar{t}_i$ ($i \in I$) voldoen aan (11.4) t/m (11.7).*

BEWIJS. Wegens stelling 11.14 voldoen alle S , die voldoen aan (11.12) tevens aan (11.13). Volgens de stelling van FARKAS (stelling 10.14) is er dus een vector $\bar{T} \geq 0$ te vinden, die voldoet aan

$$(11.15) \quad \sum_{i \in I(\bar{X})} \bar{t}_i \nabla h_i(\bar{X}) + \nabla f(\bar{X}) = 0.$$

Kiezen we nu $\bar{t}_i = 0$ voor $i \in I - I(\bar{X})$, dan is (11.15) identiek met (11.4). Verder is $\bar{X}$ toegelaten, zodat voldaan is aan (11.5), komt $\bar{T} \geq 0$ overeen met (11.6) en is wegens de zojuist beschreven keuze van de $\bar{t}_i$ -waarden voldaan aan (11.7). $\square$

De stelling van KUHN en TUCKER leidt tot de volgende meetkundige interpretatie. Voor $i \in I(\bar{X})$ ligt $\bar{X}$ in de hyperoppervlakken $h_i(\bar{X}) = 0$.

De vectoren $-\nabla h_i(\bar{X})$ staan loodrecht op deze hyperoppervlakken. Ze wijzen vanaf $\bar{X}$ naar punten buiten X . De verzameling $K = \{S \mid S = \sum_{i \in I(\bar{X})} t_i (-\nabla h_i(\bar{X})), t_i \geq 0\}$ noemt men naar analogie van de definitie in R^3 een kegel. Uit de stelling volgt dat $\bar{X}$ dan en slechts dan optimaal is, als $\nabla f(\bar{X})$ in deze kegel ligt. Lag $\nabla f(\bar{X})$ buiten K , dan bestonden er toegelaten richtingen, die een scherpe hoek maakten met $\nabla f(\bar{X})$ en kon de waarde van $f(X)$ t.o.v. $f(\bar{X})$ vergroot worden.

VOORBEELD 11.1. Gevraagd wordt het maximum van

$$f(X) = 4x_1 - x_1^2 + 5x_2 + \ln(x_1 + 2x_2)$$

onder de voorwaarden

$$h_1(X) = x_1 \geq 0$$

$$h_2(X) = x_2 \geq 0$$

$$h_3(X) = -1 + x_1 + x_2 \geq 0$$

$$h_4(X) = 7 - 3x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$

$$h_5(X) = 9 - x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 \geq 0.$$

Volgens stelling 10.11 zijn de functies $h_1(X), \dots, h_5(X)$ alle concaaf (ga dit na). Toepassing van stelling 10.12 leert ons, dat in het toegelaten gebied ook $f(X)$ concaaf is. Verder voldoet bijvoorbeeld het punt $(1,1)$ aan de voorwaarden met $h_i(X) > 0$. De voorwaarden van KUHN en TUCKER zijn dus noodzakelijk en voldoende voor dit probleem. Zij krijgen hier de volgende gedaante:

$$4 - 2x_1 + \frac{1}{x_1 + 2x_2} + t_1 + t_3 - 6x_1t_4 - 2x_1t_5 + 2x_2t_5 = 0$$

$$5 + \frac{2}{x_1 + 2x_2} + t_2 + t_3 - 2x_2t_4 + 2x_1t_5 - 6x_2t_5 = 0$$

$$h_i(X) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, 5)$$

$$t_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, 5)$$

$$\sum_{i=1}^5 t_i h_i(X) = 0.$$

Een oplossing van dit stelsel kan men als volgt bepalen. Kies een verzameling I_0 van indices i van actieve restricties. Dan moet gelden: $h_i(X) = 0$ ($i \in I_0$), $t_i = 0$ ($i \notin I_0$). Is k het aantal elementen van I_0 , dan zijn er $(k+2)$ vergelijkingen in de $(k+2)$ onbekenden x_1 , x_2 en t_i ($i \in I_0$). Voldoet de oplossing van dit stelsel aan de ongelijkheden van de voorwaarden van KUHN en TUCKER, dan is een oplossing gevonden, die aan al deze voorwaarden voldoet, dus is er een optimale oplossing van het oorspronkelijke probleem

bepaald. Voldoet de oplossing niet, dan kan men dezelfde berekeningen uitvoeren bij een andere verzameling I_0 . Door systematisch alle mogelijke verzamelingen van actieve restricties te onderzoeken vindt men zeker het maximum van het beschouwde probleem. Men vindt bij $I_0 = \{4,5\}$ de oplossing

$$x_1 = 1, x_2 = 2, t_1 = t_2 = t_3 = 0, t_4 = \frac{41}{85}, t_5 = \frac{59}{170}.$$

Het maximum wordt dus in $x_1 = 1, x_2 = 2$ bereikt.

Figuur 11.2 geeft de situatie in $\bar{x} = (1,2)$ weer. De verzameling K is gestippeld.

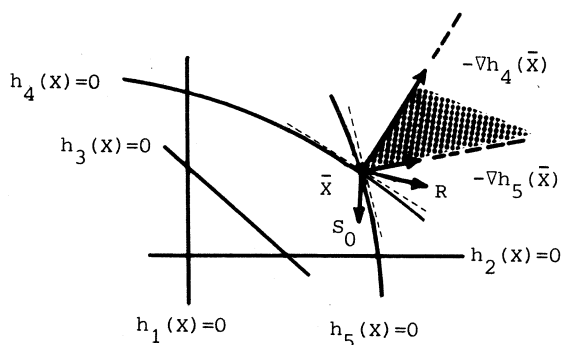


fig. 11.2

Toelichting bij voorbeeld 11.2

Zou $\nabla f(\bar{x})$ samengevallen zijn met de vector R , dan was S_0 een bruikbare richting geweest.

De LAGRANGE-functie; zadelpunten

KUHN en TUCKER maakten bij het bewijs van de stellingen 11.3 en 11.4 gebruik van de eigenschappen van de zogenaamde LAGRANGE-functie

$$(11.16) \quad \chi(x, T) = f(x) + \sum_{i=1}^m t_i h_i(x).$$

De getallen t_i worden *LAGRANGE-vermenigvuldigers* genoemd.

Mede omdat men door bestudering van de eigenschappen van $\chi(x, T)$ een

dualiteitstheorie voor de convexe programmering kan opbouwen, zullen wij de LAGRANGE-functies aan een nader onderzoek onderwerpen. Ter inleiding herinneren wij aan de methode van LAGRANGE voor het bepalen van een extremum van een functie $f(X)$ onder bijvoorwaarden van de vorm

$$(11.17) \quad h_i(X) = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Aangenomen wordt, dat alle functies $f(X)$ en $h_i(X)$ continue afgeleiden bezitten naar alle x_j .

Men kan aantonen, dat, indien het extremum van $f(X)$ onder de voorwaarden (11.17) wordt bereikt in $X = \bar{X}$ en $\bar{X}$ ligt in het inwendige van het toegelaten gebied, er een vector $T = \bar{T}$ bestaat, zodanig, dat

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi(\bar{X}, \bar{T})}{\partial x_j} &= 0 & (j = 1, \dots, n) \\ \frac{\partial \chi(\bar{X}, \bar{T})}{\partial t_i} &= 0 & (i = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

Deze voorwaarden zijn dus noodzakelijk, maar behoeven niet voldoende te zijn^{*}). De methode van LAGRANGE is in de tweede helft van de achttiende eeuw ontwikkeld ten behoeve van het oplossen van bepaalde problemen uit de natuurwetenschappen. We geven hiervan een eenvoudig voorbeeld.

VOORBEELD 11.2. Gegeven is een rechthoek met zijden x_1 en x_2 en omtrek 1. Hoe moet men x_1 en x_2 kiezen, zodanig dat de oppervlakte van deze rechthoek zo groot mogelijk wordt? De oppervlakte van de rechthoek is $x_1 x_2$. De omtrek is $2(x_1 + x_2)$. Men moet dus $x_1 x_2$ maximaliseren onder de voorwaarde $2(x_1 + x_2) = 1$. De LAGRANGE-functie heeft dan de vorm:

$$\chi(X, T) = x_1 x_2 + t[1 - 2(x_1 + x_2)].$$

De waarden waarvoor het extremum bereikt wordt, volgen uit de vergelijkingen

$$\frac{\partial \chi(X, T)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \chi(X, T)}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \chi(X, T)}{\partial t} = 0.$$

^{*}) Zie voor bewijzen: G. HADLEY, *Nonlinear and Dynamic Programming*, Addison Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts (1964), blz. 60-68; of PETER WHITTLE, *Optimisation under Constraints*, Wiley-Interscience, London (1971), blz. 17-32.

Wij vinden $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \frac{1}{4}$. Men kan eenvoudig nagaan, dat in dit punt een maximum wordt bereikt, m.a.w. de oppervlakte van een rechthoek met omtrek 1 is maximaal als de rechthoek een vierkant is met zijden van de lengte $\frac{1}{4}$.

KUHN en TUCKER vormden ook bij het convexe programmeringsprobleem een LAGRANGE-functie. Zij bewezen, dat bij het optimum van een dergelijk probleem steeds een zadelpunt van de LAGRANGE-functie behoort. Bij een willekeurige functie $\psi(X,T)$, gedefinieerd voor $X \in Z$ en $T \in V$, met $Z \subset \mathbb{R}^n$ en $V \subset \mathbb{R}^m$, wordt een zadelpunt als volgt gedefinieerd.

DEFINITIE 11.1. Een punt $(\bar{X}, \bar{T})$ is een *zadelpunt* van $\psi(X,T)$ met *zadelpunts-waarde* $\psi(\bar{X}, \bar{T})$, indien

$$(11.18) \quad \psi(X, \bar{T}) \leq \psi(\bar{X}, \bar{T}) \leq \psi(\bar{X}, T)$$

voor alle $X \in Z$ en alle $T \in V$.

Hiervoor geldt de volgende stelling.

STELLING 11.6. Een functie $\psi(X,T)$ bezit ten hoogste één zadelpuntswaarde.

BEWIJS. Stel, dat de functie twee zadelpunten (X_1, T_1) en (X_2, T_2) bezit.

Wegens (11.18) geldt hiervoor

$$\begin{aligned} \psi(X_2, T_1) &\leq \psi(X_1, T_1) \leq \psi(X_1, T_2) \\ \psi(X_1, T_2) &\leq \psi(X_2, T_2) \leq \psi(X_2, T_1), \end{aligned}$$

zodat $\psi(X_1, T_1) = \psi(X_2, T_2)$. $\square$

Verder geldt:

STELLING 11.7. Bestaan $\max_X \min_T \psi(X,T)$ en $\min_T \max_X \psi(X,T)$, dan is

$$(11.19) \quad \max_X \min_T \psi(X,T) \leq \min_T \max_X \psi(X,T).$$

BEWIJS. Voor iedere $X \in Z$ en iedere $T \in V$ geldt

$$(11.20) \quad \min_T \psi(X,T) \leq \psi(X,T) \leq \max_X \psi(X,T),$$

dus

$$(11.21) \quad \min_T \psi(X, T) \leq \max_X \psi(X, T)$$

Daar het linker lid onafhankelijk is van T en het rechter lid onafhankelijk van X , geldt (11.21) ook, als we in het linker lid het maximum over X en in het rechter lid het minimum over T nemen. Dan staat er juist (11.19). $\square$

Soms geldt in (11.19) het gelijk-teken. We zullen in de volgende stelling bewijzen, dat $\psi(X, T)$ dan een zadelpunt bezit. Alvorens hiertoe over te gaan, definiëren wij de functies

$$(11.22) \quad \psi_*(X) = \min_T \psi(X, T)$$

en

$$(11.23) \quad \psi^*(T) = \max_X \psi(X, T).$$

STELLING 11.8. *Indien $\max_X \min_T \psi(X, T)$ en $\min_T \max_X \psi(X, T)$ bestaan, bezit $\psi(X, T)$ dan en slechts dan een zadelpunt, als*

$$(11.24) \quad \max_X \min_T \psi(X, T) = \min_T \max_X \psi(X, T)$$

BEWIJS. Volgens stelling 11.7 en (11.22) en (11.23) is

$$(11.25) \quad \max_X \psi_*(X) \leq \min_T \psi^*(T).$$

Daar volgens (11.24) het maximum in het linker lid en het minimum in het rechter lid van (11.25) beide worden aangenomen, zijn er een vector $\bar{X} \in Z$ en een vector $\bar{T} \in V$ te vinden, waarvoor geldt

$$(11.26) \quad \psi_*(\bar{X}) = \psi^*(\bar{T}).$$

Wegens de definities van $\psi_*(X)$ en $\psi^*(T)$ is dan

$$(11.27) \quad \psi(X, \bar{T}) \leq \psi^*(\bar{T}) = \psi_*(\bar{X}) \leq \psi(\bar{X}, T)$$

voor alle $X \in Z$ en $T \in V$. Invullen van $X = \bar{X}$ en $T = \bar{T}$ in (11.27) levert

$$(11.28) \quad \psi^*(\bar{T}) = \psi_*(\bar{X}) = \psi(\bar{X}, \bar{T}).$$

Uit (11.27) en (11.28) volgt, dat $(\bar{X}, \bar{T})$ een zadelpunt van $\psi(X, T)$ is.

Geldt omgekeerd (11.18), dan is voor alle $X \in Z$ en $T \in V$

$$\psi(X, \bar{T}) \leq \psi(\bar{X}, T).$$

Daar het linker lid onafhankelijk is van T en het rechter lid onafhankelijk van X , geldt ook

$$\psi^*(\bar{T}) = \max_X \psi(X, \bar{T}) \leq \min_T \psi(\bar{X}, T) = \psi_*(\bar{X}).$$

Uit

$$\psi(\bar{X}, \bar{T}) \leq \psi^*(\bar{T}) \leq \psi_*(\bar{X}) \leq \psi(\bar{X}, \bar{T})$$

volgt, dat $(\bar{X}, \bar{T})$ voldoet aan (11.28). Het maximum in het linker lid en het minimum in het rechter lid van (11.25) worden dus aangenomen voor $X = \bar{X}$, respectievelijk $T = \bar{T}$, zodat in (11.25) het gelijktteken geldt. Dit komt op hetzelfde neer als (11.24). $\square$

STELLING 11.9. *Indien een punt $(\bar{X}, \bar{T})$, $\bar{X} \in Z$, $\bar{T} \in V$ voldoet aan (11.26), is het een zadelpunt van $\psi(X, T)$.*

BEWIJS. Het bewijs volgt ogenblikkelijk uit het bewijs van stelling 11.8. $\square$

VOORBEELD 11.3. De functie $\psi(x, t) = -x^2 + t^2$ is gedefinieerd voor $x \in \mathbb{R}$ en $t \in \mathbb{R}$. Er geldt

$$\psi^*(t) = \max_{x \in \mathbb{R}} \psi(x, t) = \max_{x \in \mathbb{R}} (-x^2 + t^2) = t^2$$

en

$$\psi_*(x) = \min_{t \in \mathbb{R}} \psi(x, t) = \min_{t \in \mathbb{R}} (-x^2 + t^2) = -x^2,$$

zodat

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \psi^*(t) = 0$$

en

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \psi_*(x) = 0.$$

Volgens stelling 11.9 is $(0,0)$ dus een zadelpunt van $\psi(x,t)$. Wegens

$$\psi(x,0) = -x^2 \leq \psi(0,0) = 0 \leq \psi(0,t) = t^2$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $t \in \mathbb{R}$ geldt ook (11.18) in overeenstemming met definitie 11.1.

VOORBEELD 11.4. Beschouw de functie

$$\psi(x,t) = x^2 - 4xt + t^2,$$

gedefinieerd op $Z \equiv [0,4]$ en $V \equiv [0,4]$. We willen onderzoeken, of deze functie een zadelpunt bezit. Hiertoe bepalen we eerst $\psi^*(t)$ en vervolgens $\psi_*(x)$.

Voor elke waarde van t is de grafische voorstelling van $z = x^2 - 4xt + t^2 = (x-2t)^2 - 3t^2$ in het (x,z) -vlak een parabool, die symmetrisch is t.o.v. de rechte $x = 2t$. Het maximum van z op $[0,4]$ wordt bereikt in $x = 0$, als $2t \geq 2$, dus $t \geq 1$, en in $x = 4$, als $t \leq 1$. In het eerste geval geldt in het maximum $z = t^2$, in het tweede geval $z = 16 - 16t + t^2$. Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \psi^*(t) &= \max_x (x^2 - 4xt + t^2) \\ &= \begin{cases} 16 - 16t + t^2 & (0 \leq t \leq 1) \\ t^2 & (1 \leq t \leq 4). \end{cases} \end{aligned}$$

De grafische voorstelling van $w = x^2 - 4xt + t^2$ bij gegeven x is in het (t,w) -vlak een parabool, die zijn minimum bereikt in $t = t_{\min}$. Hiervoor geldt

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = 0,$$

waaruit volgt $t_{\min} = 2x$ met $w = -3x^2$. Dit minimum kan alleen bereikt worden voor $t_{\min} \in [0,4]$, dus voor $x \in [0,2]$. Voor $x \in [2,4]$ wordt w minimaal, als t zijn maximale waarde aanneemt, zodat dan geldt:
 $w = 16 - 16x + x^2$. Dus

$$\begin{aligned}\psi_*(x) &= \min_t (x^2 - 4xt + t^2) \\ &= \begin{cases} -3x^2 & (0 \leq x \leq 2) \\ 16 - 16x + x^2 & (2 \leq x \leq 4). \end{cases}\end{aligned}$$

Uit deze uitdrukkingen voor $\psi^*(t)$ en $\psi_*(x)$ volgt, dat

$$\begin{aligned}\min_{t \in V} \psi^*(t) &= \min \left(\min_{t \in [0,1]} (16 - 16t + t^2), \min_{t \in [1,4]} t^2 \right) \\ &= \min (1, 1) \\ &= 1\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}\max_{x \in Z} \psi_*(x) &= \max \left(\max_{x \in [0,2]} -3x^2, \max_{x \in [2,4]} (16 - 16x + x^2) \right) \\ &= \max (0, -12) \\ &= 0.\end{aligned}$$

In overeenstemming met stelling 11.7 geldt wel

$$\max_{x \in Z} \min_{t \in V} \psi(x, t) < \min_{t \in V} \max_{x \in Z} \psi(x, t),$$

doch $\psi(x, t)$ bezit geen zadelpunt.

We beschouwen opnieuw het convexe programmeringsprobleem, waarin gevraagd wordt de functie $f(x)$ te maximaliseren onder de bijvoorwaarden

$$(11.29) \quad h_i(x) \geq 0 \quad (i \in I).$$

We vormen bij dit probleem de LAGRANGE-functie

$$(11.30) \quad \phi(x, T) = f(x) + \sum_{i \in I} t_i h_i(x),$$

gedefinieerd op $Z = \mathbb{R}^n$ en $V = \{t_i \mid t_i \geq 0 \ (i \in I)\}$. Hiervoor geldt de volgende stelling.

STELLING 11.10. *Bezit de LAGRANGE-functie $\phi(X, T)$ een zadelpunt $(\bar{X}, \bar{T})$, dan is $X = \bar{X}$ een optimale oplossing van het corresponderende convexe programmeringsprobleem.*

BEWIJS. Volgens definitie 11.1 en (11.29) geldt voor willekeurige $X \in Z$ en $T \in V$:

$$(11.31) \quad f(X) + \sum_{i \in I} \bar{t}_i h_i(X) \leq f(\bar{X}) + \sum_{i \in I} \bar{t}_i h_i(\bar{X}) \leq f(\bar{X}) + \sum_{i \in I} t_i h_i(\bar{X}).$$

Kies nu een willekeurige index $i_0 \in I$ en beschouw de rechter ongelijkheid (11.31) voor een vector T met componenten $t_i = \bar{t}_i$ ($i \neq i_0$) en $t_{i_0} = \bar{t}_{i_0} + 1$. Hieruit volgt $h_{i_0}(\bar{X}) \geq 0$. Daar i_0 willekeurig gekozen was, geldt dus $h_i(\bar{X}) \geq 0$ voor alle $i \in I$, zodat $X = \bar{X}$ een toegelaten punt moet zijn.

Vervolgens kiezen we opnieuw een index $i_0 \in I$ en gaan uit van een vector T met componenten $t_i = \bar{t}_i$ ($i \neq i_0$) en $t_{i_0} = 0$. Dan volgt uit de rechter ongelijkheid

$$\bar{t}_{i_0} h_{i_0}(\bar{X}) \leq 0.$$

Wegens $\bar{t}_{i_0} \geq 0$ en $h_{i_0}(\bar{X}) \geq 0$ is dus $\bar{t}_{i_0} h_{i_0}(\bar{X}) = 0$ voor elke willekeurige $i_0 \in I$. Voor de linker ongelijkheid van (11.31) kan men bijgevolg schrijven

$$f(X) \leq f(\bar{X}) - \sum_{i \in I} \bar{t}_i h_i(X)$$

zodat voor elke willekeurige X_1 , die aan (11.29) voldoet, geldt

$$f(X_1) \leq f(\bar{X}). \quad \square$$

STELLING 11.11. *Is $X = \bar{X}$ de optimale oplossing van een convex programmeringsprobleem, waarin gevraagd wordt $f(X)$ te maximaliseren onder de bijvoorwaarden (11.29), en is voldaan aan de regulariteitseis van SLATER, dan bestaat er een niet-negatieve vector $T = \bar{T}$ zodanig, dat $(\bar{X}, \bar{T})$ een zadelpunt is van (11.30).*

BEWIJS. Volgens stelling 11.5 bestaan er getallen $\bar{t}_i$ ($i \in I$) zodanig, dat

voldaan is aan de voorwaarden van KUHN en TUCKER:

$$(11.4) \quad \nabla f(\bar{X}) + \sum_{i \in I} \bar{t}_i \nabla h_i(\bar{X}) = 0$$

$$(11.5) \quad h_i(\bar{X}) \geq 0 \quad (i \in I)$$

$$(11.6) \quad \bar{t}_i \geq 0 \quad (i \in I)$$

$$(11.7) \quad \sum_{i \in I} \bar{t}_i h_i(\bar{X}) = 0.$$

Daar $\bar{T}$ voldoet aan (11.6) en de functies $f(X)$ en $h_i(X)$ concaaf zijn, is $\phi(X, \bar{T})$ een concave functie van X . Uit (11.4) volgt, dat $(\bar{X}, \bar{T})$ dan een globaal maximum is van $\phi(X, \bar{T})$, zodat

$$\phi(X, \bar{T}) \leq \phi(\bar{X}, \bar{T})$$

voor alle $X \in Z$. Wegens (11.5) en (11.7) geldt tevens

$$\phi(\bar{X}, \bar{T}) \leq \phi(\bar{X}, T)$$

voor alle $T \in U$, zodat $(\bar{X}, \bar{T})$ een zadelpunt van $\phi(X, T)$ is. $\square$

Dualiteit

Bij de LAGRANGE-functie $\phi(X, T)$ van het convexe programmeringsprobleem kan men definiëren

$$(11.32) \quad \begin{aligned} \phi_*(X) &= \min_T \phi(X, T) \\ &= \min_T (f(X) + \sum_{i \in I} t_i h_i(X)) \\ &= \begin{cases} f(X) & \text{als } h_i(X) \geq 0 \text{ voor alle } i \in I \\ -\infty & \text{als } h_i(X) < 0 \text{ voor tenminste één } i \in I \end{cases} \end{aligned}$$

en

$$(11.33) \quad \begin{aligned} \phi^*(T) &= \max_X \phi(X, T) \\ &= \max_X (f(X) + \sum_{i \in I} t_i h_i(X)). \end{aligned}$$

Het oorspronkelijke convexe programmeringsprobleem is blijkens (11.32) equivalent met het maximaliseren van $\phi_*(X)$, ofwel met het bepalen van

$$\max_X \min_T \phi(X, T).$$

Een probleem, dat beschouwd kan worden als het duale van dit probleem, verkrijgt men, wanneer men wil bepalen

$$\min_T \max_X \phi(X, T).$$

Het *duale probleem* luidt, anders gezegd:

$$(11.34) \quad \min_T (f(X) + \sum_{i \in I} t_i h_i(X))$$

onder de voorwaarden

$$(11.35) \quad f(X) + \sum_{i \in I} t_i h_i(X) = \max_Z (f(Z) + \sum_{i \in I} t_i h_i(Z))$$

$$(11.36) \quad t_i \geq 0 \quad (i \in I).$$

Omdat $f(Z)$ en $h_i(Z)$ concaaf zijn in Z , mag men wegens (11.36) voor (11.35) ook schrijven

$$(11.37) \quad \nabla f(X) + \sum_{i \in I} t_i \nabla h_i(X) = 0.$$

OPMERKING 11.1. Het duale probleem is in het algemeen niet zo elegant te formuleren als het oorspronkelijke probleem. Zo zijn de functies in het linker lid van (11.37) meestal niet lineair in X en zelfs niet concaaf of convex, zodat aan de regulariteitseis van SLATER evenmin voldaan kan zijn. Ook krijgt men in het algemeen niet door het dualiseren van het duale probleem het oorspronkelijke probleem terug. Verschillende auteurs, waaronder ROCKAFELLAR^{*)}, ontwikkelden andere vormen van dualiteit, waarvoor deze bezwaren niet gelden.

^{*)} R.T. ROCKAFELLAR, *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1970).

STELLING 11.12. Is x_0 een toegelaten oplossing van een convex programmeringsprobleem, en is (x_1, T_1) een toegelaten oplossing van het duale probleem dan geldt

$$(11.38) \quad f(x_0) \leq f(x_1) + \sum_{i \in I} t_{i1} h_i(x_1).$$

BEWIJS. Wegens (11.32) is $f(x_0) = \phi_*(x_0)$, zodat geldt

$$\begin{aligned} f(x_0) = \phi_*(x_0) &\leq \phi^*(T_1) = \max_Z (f(Z) + \sum_{i \in I} t_{i1} h_i(Z)) \\ &= f(x_1) + \sum_{i \in I} t_{i1} h_i(x_1). \quad \square \end{aligned}$$

STELLING 11.13. Heeft het convexe programmeringsprobleem een eindige optimale oplossing $x = \bar{x}$ en is voldaan aan de regulariteitseis van SLATER, dan heeft het duale probleem eveneens een eindige optimale oplossing en zijn de waarden van de criteriumfuncties gelijk.

BEWIJS. Wegens stelling 11.11 is er bij de vector $\bar{x}$ een vector $\bar{T} \geq 0$ te vinden zodanig, dat $(\bar{x}, \bar{T})$ een zadelpunt is van de LAGRANGE-functie $\phi(x, T)$. Voor $\bar{x}$ en $\bar{T}$ geldt

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) = \phi_*(\bar{x}) &= \phi^*(\bar{T}) = f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{t}_i h_i(\bar{x}) \\ &= \max_Z (f(Z) + \sum_{i \in I} \bar{t}_i h_i(Z)). \end{aligned}$$

$(\bar{x}, \bar{T})$ is dus een toegelaten vector voor het duale probleem, die aan (11.38) voldoet met een gelijkteken, zodat $(\bar{x}, \bar{T})$ optimaal moet zijn. $\square$

Dat het door ons behandelde dualiteitsbegrip consistent is met het dualiteitsbegrip uit de lineaire programmering, toont het volgende voorbeeld.

VOORBEELD 11.5. Beschouw het lineaire programmeringsprobleem, waarin gevraagd wordt

$$(11.39) \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

te maximaliseren onder de voorwaarden

$$(11.40) \quad b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$(11.41) \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Geven we de componenten van de vector T van LAGRANGE-vermenigvuldigers, die behoren bij (11.40) weer door u_i ($i=1, \dots, m$) en de overige componenten door v_j ($j=1, \dots, n$), dan luidt de LAGRANGE-functie

$$(11.42) \quad \phi(X, T) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m u_i (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) + \sum_{j=1}^n v_j x_j.$$

Het duale probleem van het beschreven probleem wordt dus volgens de voorgaande bladzijden:

$$(11.43) \quad \min_T \max_X \phi(X, T),$$

ofwel, volgens (11.37) en (11.36),

minimaliseer als functie van de u_i en v_j

$$(11.44) \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m u_i (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) + \sum_{j=1}^n v_j x_j$$

onder de voorwaarden

$$(11.45) \quad c_j - \sum_{i=1}^m u_i a_{ij} + v_j = 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$(11.46) \quad u_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$(11.47) \quad v_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Nu volgt uit (11.45), dat men (11.44) mag vervangen door

$$(11.48) \quad \sum_{i=1}^m b_i u_i$$

zodat het duale probleem wordt: minimaliseer (11.48) onder de voorwaarden (11.45) t/m (11.47). Dit probleem is juist hetzelfde probleem als het duale probleem, dat men verkregen zou hebben volgens de regels, gegeven in §7 van deel 1.6a van deze reeks (vergelijk het probleem beschreven door (7.1) t/m (7.3) en het duale probleem (7.12) t/m (7.14)).

De voorwaarden van KUHN en TUCKER, die gelden voor het beschouwde lineaire programmeringsprobleem, zijn (11.45) (volgens (11.4)), (11.40) en (11.41) (volgens (11.5)), (11.46) en (11.47) (volgens (11.6)) en

$$(11.49) \quad \sum_{i=1}^m u_i (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) = 0,$$

$$(11.50) \quad \sum_{j=1}^n v_j x_j = 0$$

(volgens (11.7)).

Deze komen dus overeen met de voorwaarden voor het oorspronkelijke probleem, de voorwaarden voor het duale probleem en de "complementary slackness"-voorwaarden (11.49) en (11.50).

Aan het einde van deze paragraaf merken wij nog op, dat de meeste besproken stellingen onder minder stringente aannamen bewezen kunnen worden. Wij verwijzen hiervoor naar de literatuur.*)

*) O.L. MANGASARIAN, *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York (1969).
B. MARTOS, *Nonlinear Programming Theory and Methods*, North-Holland, Amsterdam (1975).

12. TOEPASSINGEN VAN CONVEXE PROGRAMMERINGSMODELLEN

Teneinde enig inzicht te geven bij wat voor typen problemen convexe programmeringsmodellen gebruikt kunnen worden, geven wij in deze paragraaf een beknopte behandeling van een aantal van deze problemen. Hierbij beperken wij ons tot voorbeelden uit de economische sfeer.

VOORBEELD 12.1. Beleggings- en investeringsproblemen. Veel particulieren, instellingen en bedrijven worden periodiek geconfronteerd met de vraag op welke wijze zij ter beschikking komend geld op de beste wijze kunnen beleggen in fondsen, respectievelijk investeren in projecten. Het probleem kan ook algemener zijn in die zin dat men kan kiezen uit een aantal investeringsprojecten en dat men zich afvraagt welke projecten gekozen moeten worden en hoe men ze moet financieren.

De economische literatuur kent voor deze problemen tal van maatstaven aan de hand waarvan men een keuze kan maken, zoals de terugverdiëntijd, de interne rentevoet en de kapitaalwaarde van een investering. Bij deze maatstaven wordt niet expliciet rekening gehouden met het stochastische karakter van de opbrengsten van de projecten. Een belangrijke methode die dit wel doet maakt gebruik van wiskundige programmering. De grondslag van deze aanpak, de zogenaamde *portefeuilleselectiemethode* is gelegd door H.M. MARKOWITZ.*) Wij illustreren de methode aan de hand van een beleggingsprobleem en zullen daarna aangeven op welke wijze de methode tot investeringsproblemen kan worden uitgebreid.

Stel dat iemand een geldsbedrag b voor een langere periode wil beleggen in n verschillende fondsen. De jaarlijkse opbrengst per gulden belegd in fonds j , bijvoorbeeld gedefinieerd door:

$$\frac{\text{koers einde v.h. jaar} - \text{koers begin v.h. jaar} + \text{uitkeringen in dat jaar}}{\text{koers begin van het jaar}}$$

is een stochastische grootte r_j met verwachting μ_j en variantie σ_j^2 . De n -dimensionale vector van de μ_j geven wij aan met M en de covariantie-

*) H.M. MARKOWITZ, *Portfolio Selection*, John Wiley and Sons, New York (1959).

matrix van de $\underline{r}_j$ -variabelen met C . Belegt men nu x_j gulden in fonds j , dan is de verwachting van de jaarlijkse opbrengst van de portefeuille gelijk aan

$$(12.1) \quad \mu(X) = M'X$$

en de variantie gelijk aan

$$(12.2) \quad \sigma^2(X) = X'CX,$$

waarin $X' = (x_1, \dots, x_n)$.

In de meeste situaties zal men ten aanzien van deze verwachting en variantie bepaalde wensen hebben. Men kan zoeken naar die portefeuille welke een niet te grote variantie heeft en dan de verwachting maximaliseren, of eisen dat de verwachte opbrengst tenminste een bepaalde waarde heeft en dan de variantie minimaliseren (vergelijk voorbeeld 1.6 uit deel 6A van deze leergang). Verder kan men eisen dat in een bepaald fonds niet meer dan een zeker percentage van b mag worden belegd, dat tenminste zoveel procent obligaties moeten zijn, enzovoorts.

Met het doel een eerste selectie uit de vele mogelijkheden te kunnen maken voert MARKOWITZ het begrip *efficiënte portefeuille* in. Dit is een portefeuille die afgezien van de eisen ten aanzien van verwachting en variantie aan alle verdere voorwaarden voldoet en bovendien de eigenschap bezit dat er

(a) geen portefeuille bestaat met een grotere of gelijke verwachting en een kleinere variantie, en

(b) geen portefeuille bestaat met een kleinere of gelijke variantie en een grotere verwachting.

Grafisch kan deze eigenschap worden weergegeven in een figuur zoals fig. 12.1, waarin σ^2 -waarden tegen μ -waarden zijn uitgezet. Is X_0 een efficiënte portefeuille met $\mu(X_0) = \mu_0$ en $\sigma^2(X_0) = \sigma_0^2$, dan bestaan er geen portefeuilles die aan de overige eisen voldoen en waarvan het corresponderende punt (μ, σ^2) ligt in het gearceerde gebied, inclusief de rand, van figuur 12.1. Hieruit volgt dat de lijn van efficiënte portefeuilles in het (μ, σ^2) -vlak, de zogenaamde *kritieke lijn* een stijgende functie is. Men kan zelfs bewijzen dat deze functie convex is, zoals is aangegeven in figuur 12.2.

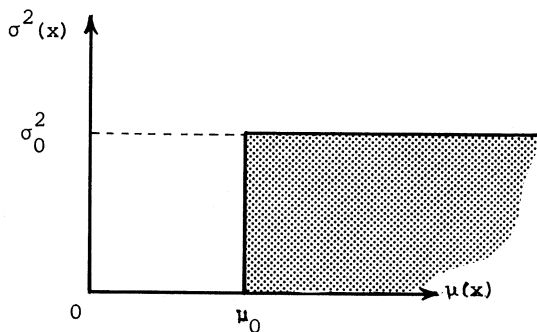


fig. 12.1

In het gearceerde gebied komen geen (μ, σ^2) -punten voor die behoren bij realiseerbare portefeuilles

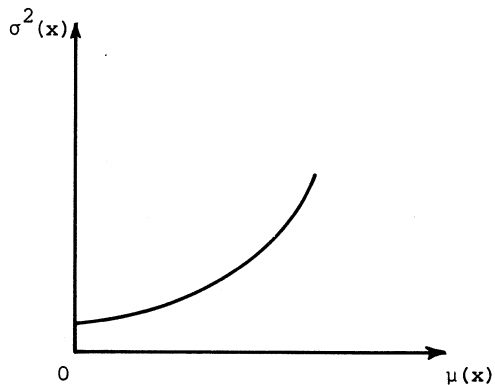


fig. 12.2

Een mogelijke vorm van de kritieke lijn van efficiënte portefeuilles

Stel dat de voorwaarden, afgezien van die ten aanzien van verwachting en variantie luiden

$$(12.3) \quad Ax = B$$

en

$$(12.4) \quad x \geq 0;$$

hieronder bevindt zich dus de voorwaarde dat het gehele bedrag b belegd moet worden:

$$(12.5) \quad \sum_{j=1}^n x_j = b.$$

Men kan dan met behulp van de stelling van KUHN en TUCKER bewijzen dat een portefeuille $\bar{X}$ dan en slechts dan een efficiënte portefeuille is, wanneer er een $\bar{\lambda} > 0$ bestaat, zodanig dat

$$(12.6) \quad \min_X [X'CX - \bar{\lambda}M'X \mid AX = B \wedge X \geq 0] = \bar{X}'C\bar{X} - \bar{\lambda}M'\bar{X};$$

zie J.Th.H.C. VAN LIESHOUT.*) Lost men dus het probleem:

minimaliseer

$$(12.7) \quad f(X) = X'CX - \lambda M'X$$

onder de voorwaarden (12.3) en (12.4) op voor alle $\lambda \geq 0$, dan vindt men alle efficiënte portefeuilles. Dit is een *parametrisch kwadratisch programmeringsprobleem*, voor het oplossen waarvan snelle algorithmen bestaan, gebaseerd op de in paragraaf 13 te bespreken algorithmen voor kwadratische programmering.

Men kan hierbij beginnen met $\lambda = 0$ te kiezen en minimaliseert dan dus de variantie van de portefeuille onder de voorwaarden (12.3) en (12.4). Bij deze oplossing behoort een bepaalde basis van het probleem (vgl. §13). Laat men vervolgens λ toenemen, dan wordt voor een bepaalde waarde λ_1 van λ één van de basisvectoren vervangen door een andere; vergelijk het overeenkomstige verschijnsel in voorbeeld 8.2 van deel 6A. Wordt λ nog groter gekozen, dan vindt er voor een waarde $\lambda = \lambda_2$ wederom een wijziging in de basis plaats, enzovoorts. De portefeuilles, die behoren bij waarden van λ waarvoor juist een wijziging in de basisvectoren optreedt, worden *hoekportefeuilles* genoemd.

Heeft men eenmaal alle efficiënte portefeuilles gevonden, dan moet hieruit nog de meest gewenste worden geselecteerd. Wij zullen hierop niet verder ingaan. Voor een uitvoeriger bespreking van dit type problemen verwijzen wij naar bijvoorbeeld D.E. FARRAR**), of E.F. FAMA and M.H. MILLER.***)

*) J.Th.H.C. VAN LIESHOUT, *Investerings-financieringsselectie en wiskundige optimalisering*, Proefschrift Katholieke Hogeschool, Tilburg (1973), blz. 74 e.v.

**) D.E. FARRAR, *The Investment Decision under Uncertainty*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (1962).

***) E.F. FAMA & M.H. MILLER, *The Theory of Finance*, Holt, Rinehart and Winston, New York (1972).

Tot slot geven wij de kritieke lijnen voor twee problemen, waarin men kan kiezen uit 10 aandelen. De vector van verwachtingen M en de covariantiematrix C zijn opgenomen in tabel 12.1.*) In tabel 12.2 worden de hoekportefeuilles gegeven indien als bijvoorwaarden worden opgenomen:

$$(12.8) \quad \sum_{j=1}^{10} x_j = 100$$

$$(12.9) \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, 10).$$

Voorwaarde (12.5) is hier vervangen door voorwaarde (12.8), die de in de afzonderlijke fondsen te beleggen hoeveelheden geld uitdrukt als percentage van het te beleggen bedrag b .

Tabel 12.1

De vector van verwachtingen en de covariantiematrix van de opbrengsten van 10 aandelen

	M	C									
1	10,3	82,97	15,01	30,82	21,91	26,50	13,03	25,51	32,56	50,92	38,13
2	9,0	15,01	75,64	17,17	2,87	38,33	42,71	14,17	7,40	20,50	26,90
3	9,5	30,82	17,17	81,35	17,55	26,38	35,07	18,35	29,32	45,50	35,97
4	5,4	21,91	2,87	17,55	38,29	19,88	0,10	22,61	25,60	24,26	11,56
5	7,5	26,50	38,33	26,38	19,88	133,42	42,80	40,12	45,29	40,59	39,57
6	9,2	13,03	42,71	35,07	0,10	42,80	212,66	23,10	12,16	31,76	12,78
7	5,6	25,51	14,17	18,35	22,61	40,12	23,10	67,40	28,82	18,45	34,90
8	5,3	32,56	7,40	29,32	25,60	45,29	12,16	28,82	63,63	32,85	28,13
9	7,0	50,92	20,50	45,50	24,26	40,59	31,76	18,45	32,85	154,81	32,47
10	7,0	38,13	26,90	35,97	11,56	39,57	12,78	34,90	28,13	32,47	80,55

*) De gegevens zijn ontleend aan: J.J.M. BRAAT, *Portfolio-selectie*, Verslag van een stage-onderzoek bij Koninklijke Nederlandsche Hoogovens en Staalfabrieken N.V. (1967).

Tabel 12.2

De hoekportefeuilles van het model minimaliseer (12.7) onder de voorwaarden (12.8) en (12.9)

fonds	percentages van de fondsen in de verschillende hoekportefeuilles							
1	2,49	12,13	17,04	21,30	37,68	81,47	97,36	100
2	21,51	24,87	26,85	28,12	32,13	-	-	-
3	5,13	11,37	14,37	16,55	25,47	13,99	2,64	-
4	48,39	40,60	34,78	29,25	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-	-	-
6	4,66	4,65	4,58	4,78	4,72	4,54	-	-
7	4,54	3,48	2,38	-	-	-	-	-
8	5,85	-	-	-	-	-	-	-
9	-	-	-	-	-	-	-	-
10	7,42	2,91	-	-	-	-	-	-
$\sigma^2(X)$	23,98	25,06	26,41	28,18	40,30	65,54	80,29	82,97
$\mu(X)$	6,81	7,59	7,97	8,32	9,63	10,14	10,28	10,30

Tabel 12.3 geeft een overzicht van de hoekportefeuille wanneer naast de voorwaarden (12.8) en (12.9) wordt geëist dat ten hoogste 25% van het belegde bedrag in één aandeel mag worden belegd, dus

$$(12.10) \quad x_j \leq 25 \quad (j = 1, \dots, 10).$$

In figuur 12.3 is voor beide modellen de kritieke lijn getekend, waarbij een hoekportefeuille van het model met de voorwaarden (12.8) en (12.9) met X wordt aangegeven en een hoekportefeuille met de voorwaarden (12.8) t/m (12.10) met O.

De gedachtengang die in het bovenstaande is toegepast op een beleggingsprobleem in beursfondsen, kan worden uitgebreid tot investerings-financieringsselectieproblemen. Men duidt dan ieder van de projecten waaruit ge-

kozen kan worden aan met een afzonderlijke variabele x_j , die de waarden 0 en 1 kan aannemen, hetgeen inhoudt dat het project niet, respectievelijk wel wordt uitgevoerd. Het probleem (12.7) te minimaliseren onder de voorwaarden (12.3) en (12.4) gaat dan over in een discreet parametrisch kwadratisch optimaliseringsprobleem. Voor een verdere toelichting verwijzen wij naar J.TH. VAN LIESHOUT.*)

Tabel 12.3

De hoekportefeuilles van het model minimaliseer (12.7) onder de voorwaarden (12.8) t/m (12.10)

fonds	percentages van de fondsen in de verschillende hoekportefeuilles											
1	6,66	7,76	19,30	20,71	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00
2	24,70	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00
3	9,31	9,96	16,84	17,61	19,01	19,22	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00
4	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	18,58	17,00	11,22	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-	-	-	2,55	5,58	5,27	-
6	3,54	3,58	4,79	4,96	5,73	5,78	6,42	8,00	11,23	16,12	19,73	25,00
7	12,70	12,20	7,51	6,73	0,26	-	-	-	-	-	-	-
8	14,30	13,15	1,56	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	3,79	3,35	-	-	-	-	-	-	-	3,30	-	-
$\sigma^2(X)$	25,63	25,64	27,53	27,99	29,62	29,69	31,92	32,57	35,12	41,48	43,77	47,52
$\mu(X)$	7,20	7,29	8,13	8,24	8,52	8,53	8,79	8,85	9,03	9,33	9,41	9,50

*) T.a.p. hoofdstuk 3.

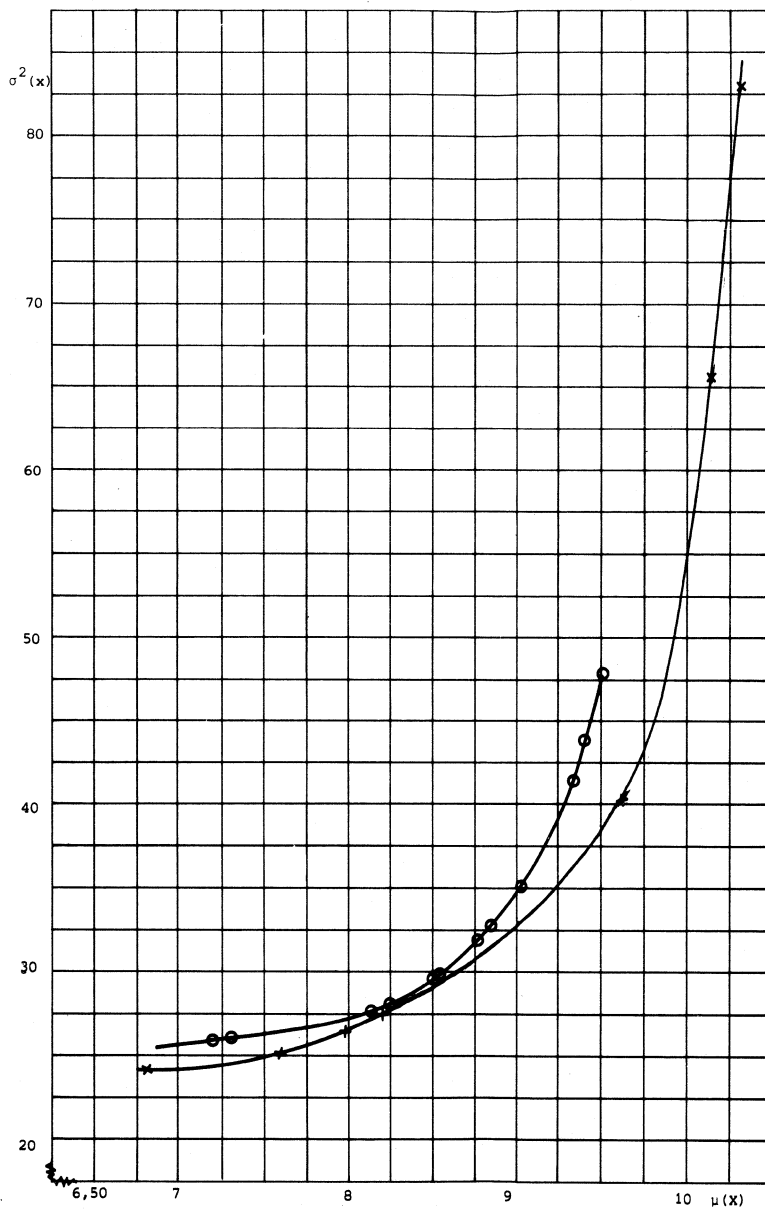


fig. 12.3

VOORBEELD 12.2. Schatting van marktaandelen. Een markt van consumptiegoederen wordt beheerst door een klein aantal elkaar beconcurrerende merken. Zowel het aantal afnemers als de vraag van deze afnemers is constant. Aan de totale vraag wordt voldaan, zodat ieder merk de positie slechts kan verbeteren ten koste van de concurrenten. Pogingen hiertoe door bijvoorbeeld reclame-acties worden beantwoord met tegenacties van de concurrenten. Wanneer wij nu aannemen dat het aantal merken gedurende een reeks van jaren constant blijft, dan kan men zich afvragen of dit spel van acties en tegenacties op den duur tot een evenwicht op de markt leidt. Eén van de methoden om dit te onderzoeken is het opstellen van een Markovketenmodel (vergelijk deel 4 van deze Leergang).

Wij gaan van de vereenvoudigende onderstelling uit dat een consument die een bepaald merk aan het begin van het jaar koopt, dit merk het gehele jaar blijft kopen en dat er een constante overgangswaarschijnlijkheid p_{ij} bestaat dat een consument die in jaar t merk i koopt in jaar $t+1$ merk j gaat gebruiken. De toestand i waarin een consument zich in een jaar bevindt wordt aan het begin van het jaar bepaald door het merk dat hij dan koopt. Stel verder dat wij de aantallen kopers x_{jt} kennen van de verschillende merken j in t_0 achtereenvolgende jaren, dus

$$(12.11) \quad x_{jt} = \text{aantal kopers van merk } j \text{ in jaar } t \quad \begin{matrix} (j = 1, \dots, n) \\ (t = 1, \dots, t_0) \end{matrix}.$$

Willen wij de marktaandelen van de verschillende merken in de toekomst kunnen voorspellen, dan moeten wij de overgangswaarschijnlijkheden p_{ij} schatten. Dit kan op de volgende wijze. Laat

$$(12.12) \quad x'_t = (x_{1t}, \dots, x_{nt})$$

de aantallen kopers van de verschillende merken in jaar t voorstellen. Bij gegeven p_{ij} zijn de verwachte aantallen kopers in jaar $t+1$, aan te geven door

$$(12.13) \quad y'_{t+1} = (y_{1,t+1}, \dots, y_{n,t+1}),$$

gelijk aan

$$(12.14) \quad y_{j,t+1} = \sum_{i=1}^n x_{it} p_{ij} \quad (j = 1, \dots, n),$$

of, in vector- en matrixnotatie

$$(12.15) \quad y_{t+1} = P'x_t$$

met

$$(12.16) \quad P = (p_{ij}) \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

De kleinste kwadratenschattingen van de kansen p_{ij} worden nu gevonden door de functie

$$(12.17) \quad f(P) = \sum_{t=1}^{t_0-1} (x_{t+1} - P'x_t)' (x_{t+1} - P'x_t)$$

te minimaliseren als functie van de p_{ij} onder de voorwaarden

$$(12.18) \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$(12.19) \quad p_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Ten aanzien van de noodzaak van voorwaarde (12.18) vergelijk men paragraaf 2 van deel 4 van deze Leergang. Het geformuleerde probleem is een kwadratisch programmeringsprobleem.

Heeft men de overgangswaarschijnlijkheden p_{ij} geschat, dan kan ook de stationaire verdeling van de Markovketen worden berekend met behulp van formule (5.9) uit het genoemde deeltje van de Leergang. Vervolgens leert een vergelijking van deze verdeling met de in jaar t waargenomen verdeling in hoeverre het model adequaat is en of de stationaire verdeling reeds bereikt is.

Het tot nu toe beschreven model is onder andere gebruikt door L.G. TELSER om de sigarettenmarkt in de Verenigde Staten te analyseren.*) Deze werd in de periode 1925-1943 beheerst door 3 merken, te weten Camel, Lucky Strike en Chesterfield. Andere merken hadden slechts een zeer klein aandeel van de markt. De aandelen van de 3 grote merken gedurende deze jaren in de markt zijn, genormeerd op 1, opgenomen in tabel 12.4. Hanteert men deze gegevens om de overgangswaarschijnlijkheden p_{ij} te schatten met behulp van het model: minimaliseer (12.17) onder de voorwaarden (12.18) en

*) L.G. TELSER, *Advertising and Cigarettes*, The Journal of Political Economy 70 (1962), 471-499 en IDEM, *Least-Squares Estimates of Transition Probabilities*, Hfdst. 11 in *Measurement in Economics*, Stanford University Press, Stanford (1963).

(12.19), dan vindt men als schatting voor de matrix P de volgende matrix

$$(12.20) \quad \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,669 & 0,142 & 0,189 \\ 0,000 & 0,868 & 0,132 \\ 0,402 & 0,000 & 0,598 \end{pmatrix} \end{matrix} .$$

Tabel 12.4

Marktaandelen van de drie belangrijke sigarettenmerken in de
Verenigde Staten gedurende de jaren 1925-1943

jaar	Camel	Lucky Strike	Chesterfield
1925	0,505	0,203	0,292
1926	0,488	0,190	0,322
1927	0,450	0,224	0,326
1928	0,407	0,304	0,289
1929	0,364	0,361	0,275
1930	0,336	0,412	0,252
1931	0,331	0,443	0,226
1932	0,294	0,450	0,256
1933	0,279	0,401	0,320
1934	0,342	0,330	0,328
1935	0,387	0,301	0,312
1936	0,407	0,291	0,302
1937	0,408	0,295	0,297
1938	0,384	0,320	0,296
1939	0,374	0,336	0,290
1940	0,371	0,350	0,279
1941	0,358	0,265	0,277
1942	0,353	0,385	0,262
1943	0,328	0,387	0,285

De invariante kansen die behoren bij deze matrix luiden

$$(12.21) \quad q_1 = 0,344 \quad q_2 = 0,372 \quad q_3 = 0,284,$$

hetgeen behoorlijk overeenkomt met de verdelingen gedurende de laatste jaren van de waargenomen reeks. Dit betekent derhalve dat, wanneer aan de onderstellingen van het model in redelijke mate is voldaan, er geen aanzienlijke verschuivingen in de marktaandelen zullen optreden zolang het concurrentiegedrag - een oligopolistisch gedrag - op de sigarettenmarkt onveranderd blijft.

Aan het einde van de Tweede Wereldoorlog komt er in de beschreven situatie echter verandering door de opkomst van de filtersigaret en de mentholsigaret. Op de dan ontstane marktsituatie kan men voor de periode 1945-1960 echter hetzelfde soort beschouwingen toepassen als voor de periode 1925-1943; men vergelijkte G.R.M. MUSTERT.*)

VOORBEELD 12.3. De ontwikkeling van de omvangsverdeling van ondernemingen.**)

Een andere variant van het in het vorige voorbeeld behandelde model kan worden gebruikt in situaties waarin de toestanden niet a priori zijn gegeven, maar waarin deze nog vrij gekozen kunnen worden. Wij illustreren dit aan de hand van een voorbeeld ontleend aan de theorie van de industriële organisatie.

Een bedrijfstak bestaat uit een aantal ondernemingen, welk aantal wij in de loop der jaren voorlopig constant onderstellen. Het te beschouwen kenmerk van de onderneming is de omvang, in dit voorbeeld te meten aan de personeelssterkte. Zowel voor dit kenmerk als voor vele andere kenmerken voor de omvang van een onderneming geldt dat de frequentieverdeling over een bedrijfstak zeer scheef is naar rechts. Het is verder een bekend verschijnsel dat wanneer men de frequentieverdeling van de omvang vervangt door de frequentieverdeling van de logaritmische van de omvang er een benadering normale verdeling ontstaat (vergelijk ook voorbeeld 1.8 uit deel 3 van deze Leergang). Wij zullen daarom de logaritmische van het aantal werknemers als kenmerk van de omvang nemen. De indeling in klassen wordt zo gekozen dat iedere bovengrens tweemaal zo groot is als de ondergrens; op de logaritmische schaal is iedere klasse dus even breed, te weten $\log 2$.

Op discrete tijdstippen gaan wij na hoeveel ondernemingen er zich in

*) G.R.M. MUSTERT, *Markovketens en Wachttijden*, Deel 1, paragraaf 12, Collegedictaat Katholieke Hogeschool, Tilburg (1973).

**) Dit voorbeeld is ontleend aan het gelijknamige proefschrift van G.R.M. MUSTERT, Katholieke Hogeschool, Tilburg (1975), in het bijzonder paragraaf 2.2.

de verschillende klassen bevinden. Tussen deze tijdstippen kunnen ondernemingen in dezelfde klasse blijven of naar een klasse hoger of lager gaan.

Wij onderstellen dat er overgangswaarschijnlijkheden p_{ij} bestaan die aangeven hoe groot de kansen zijn dat een onderneming die zich bij de eerste waarneming in klasse i bevond bij de volgende waarneming in klasse j wordt aangetroffen. Een vaak hanteerbaar model is het model waarin alleen de overgangen van klasse i naar zichzelf of naar de aangrenzende klassen $i-1$ en $i+1$ positief kunnen worden. Nemen wij bovendien aan dat deze kansen onafhankelijk zijn van de uitgangstoestand i , dan ontstaat een model waarin geldt

$$(12.22) \quad p_{11} = 1 - r_1, \quad p_{12} = r_1$$

$$(12.23) \quad p_{i,i-1} = r_{-1}, \quad p_{ii} = r_0, \quad p_{i,i+1} = r_1 \quad (i > 1).$$

De matrix van overgangswaarschijnlijkheden krijgt dan de vorm

$$(12.24) \quad R = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & . & . & . \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ . \\ . \\ . \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccccccc} 1-r_1 & r_1 & & & & & \\ r_{-1} & r_0 & r_1 & & & & \\ & r_{-1} & r_0 & r_1 & & & \\ & & r_{-1} & r_0 & r_1 & & \\ & & & r_{-1} & r_0 & r_1 & \\ & & & & . & . & . \\ & & & & . & . & . \\ & & & & . & . & . \end{array} \right) \end{matrix}.$$

Wij geven de frequentieverdeling over de klassen op waarnemingstijdstip t aan met X_t . De verwachte frequenties op tijdstip $t+1$, aan te geven door

$$(12.25) \quad Y'_{t+1} = (y_{1,t+1}, \dots, y_{n,t+1})$$

zijn dan gelijk aan

$$(12.26) \quad Y_{t+1} = R'X_t.$$

Evenals in voorbeeld 12.2 kunnen wij nu kleinste kwadratenschatters voor r_{-1} , r_0 en r_1 vinden door

$$(12.27) \quad f(R) = \sum_t (x_{t+1} - R'x_t)'(x_{t+1} - R'x_t)$$

te minimaliseren als functie van r_{-1} , r_0 en r_1 onder de voorwaarden

$$(12.28) \quad r_{-1} + r_0 + r_1 = 1$$

en

$$(12.29) \quad r_{-1}, r_0, r_1 \geq 0.$$

In (12.27) loopt de sommatie over alle beschikbare paren waarnemingen.

Tot dusver is aangenomen, dat het aantal ondernemingen op ieder waarnemings-tijdstip constant is. Omdat hieraan in de praktijk niet is voldaan moet de methode nog zodanig worden aangepast, dat het systeem sluitend wordt voor wat betreft het totaal aantal bedrijven, dat in de bedrijfstak werkzaam is. Noch het aantal toegetreden bedrijven, noch het aantal uitgetreden bedrijven is in de beschikbare statistieken gespecificeerd. Wij gaan er daarom in dit voorbeeld van uit dat elk uittredend bedrijf in dezelfde klasse door een nieuw bedrijf wordt opgevolgd, indien het aantal bedrijven toeneemt, of dat elk toetredend bedrijf door een verdwijnend bedrijf in dezelfde klasse is voorafgegaan, indien het aantal bedrijven afneemt. We modificeren de schattingsprocedure slechts met betrekking tot de verandering van het aantal bedrijven. Voor wat betreft een per saldo toetredend bedrijf nemen wij aan dat een dergelijk bedrijf met kans s_j ($j=1,2,\dots$) toetreedt in klasse j en ten aanzien van een per saldo uittredend bedrijf onderstellen wij dat een dergelijk bedrijf met kans s_j uittreedt vanuit klasse j . Als w_{t+1} het aantal per saldo toetredende ($w_{t+1} > 0$) of uittredende ($w_{t+1} < 0$) bedrijven in periode $t+1$ is, wordt de vector y_{t+1} van verwachte frequenties gegenereerd volgens

$$(12.30) \quad y_{t+1} = R'x_t + w_{t+1} S$$

waarin

$$(12.31) \quad S' = (s_1, s_2, \dots),$$

$$(12.32) \quad \sum_{j=1}^{\infty} s_j = 1$$

en

$$(12.33) \quad s_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Wij minimaliseren dan

$$(12.34) \quad \sum_t (x_{t+1} - R'x_t - w_{t+1}S)'(x_{t+1} - R'x_t - w_{t+1}S)$$

onder de voorwaarden (12.28), (12.29), (12.32) en (12.33).

De tot nu toe beschreven methode wordt door MUSTERT toegepast met als uitgangspunt de gegevens van 7 paren momentopnamen van de aantallen werknemers in de bedrijven van verschillende industrietakken. Deze waarnemingen zijn tussen maart 1953 en december 1970 verricht en opgenomen als Algemene Industriestatistieken in verschillende afleveringen van het Maandschrift van het C.B.S. Het aantal omvangsklassen bedraagt in deze statistieken steeds 7. De matrix is dus een 7×7 -matrix en de vector S heeft de vorm

$$(12.35) \quad S' = (s_1, s_2, \dots, s_6, s_7).$$

De berekeningen werden uitgevoerd met behulp van de in paragraaf 13 te bespreken simplexmethode voor kwadratische programmeringproblemen. Tabel 12.5 bevat de geschatte kansen r_i en s_j voor 8 verschillende bedrijfstakken.*)

Tabel 12.5

De geschatte kansen r_i en s_j voor 8 verschillende bedrijfstakken

bedrijfs- kans \ tak	1	2	3	4	5	6	7	8
r_{-1}	0,0126	0,1467	0,2732	0,1214	0,2863	0,1141	0,5069	0,1766
r_0	0,9874	0,7702	0,4932	0,8149	0,5188	0,8283	0,1671	0,6425
r_1	0,0000	0,0831	0,2336	0,0638	0,1949	0,0575	0,3260	0,1809
s_1	0,7752	0,5482	0,6759	0,5291	0,1566	0,6012	0,3002	0,0883
s_2	0,1019	0,2327	0,0000	0,2987	0,2588	0,1268	0,3422	0,3385
s_3	0,0785	0,0930	0,2831	0,1017	0,3829	0,1831	0,2864	0,0898
s_4	0,0352	0,0613	0,0409	0,0704	0,1334	0,0661	0,0209	0,1248
s_5	0,0091	0,0607	0,0000	0,0000	0,0241	0,0052	0,0000	0,0793
s_6	0,0000	0,0041	0,0000	0,0000	0,0321	0,0000	0,0000	0,1603
s_7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0120	0,0175	0,0504	0,1189

*) De in deze tabel vermelde schattingen wijken voor de bedrijfstakken 5 t/m 8 enigszins af van de door MUSTERT opgegeven waarden, daar deze voor de vector S uitging van de vorm $S' = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, 0)$.

Hoewel in tabel 12.5 individuele kansen zijn opgegeven is het voor een economische interpretatie en waardering van de modellen zinvoller te kijken naar de ontwikkelingen van de frequentieverdelingen x_t en deze te vergelijken met de uiteindelijk uit het proces af te leiden invariante verdeling. Het blijkt dat deze ontwikkelingen met het nu ter beschikking staande materiaal nog onvoldoende kunnen worden geïnterpreteerd en dat de waargenomen frequentieverdelingen nog ver verwijderd zijn van de te berekenen limietverdelingen.

MUSTERT betreft in zijn proefschrift ook andere modellen dan het hier beschreven model in zijn beschouwingen. Geen van alle leiden deze op het ogenblik tot volledig bevredigende resultaten. Tenslotte geeft hij aan op welke wijze er in de toekomst vermoedelijk verbeteringen kunnen worden bereikt.

VOORBEELD 12.4. Een enquêteprobleem. Een bureau voor marktonderzoek wil nagaan hoe de afnemers van een gebruiksartikel denken over een eventueel te nemen maatregel. Hiertoe zullen steekproeven worden genomen in alle n districten waarin het land is verdeeld en wel een steekproef van de omvang x_j in district j . Van het artikel zijn $m-1$ bekende merken in de handel en een aantal weinig gekochte; de kopers van deze laatste merken worden tesamen met diegenen die het artikel in het geheel niet kopen opgevat als kopers van een m^{de} pseudomerk. Aan iedere geënquêteerde zal worden gevraagd welk merk i hij gebruikt en of hij voor of tegen de maatregel is. Uit de zo verkregen gegevens wil men voor ieder merk schatten hoe groot de fractie gebruikers in het gehele land bedraagt, die voor de maatregel is. Daarbij stelt men twee eisen, te weten:

- (a) de totale steekproefomvang moet zo klein mogelijk zijn,
- (b) de varianties van de schatters voor de fracties voorstanders in het gehele land mogen voor ieder merk niet groter zijn dan een gegeven waarde d .

Wij vertalen dit probleem als volgt in een wiskundig probleem. De totale omvang van de te nemen steekproef, dus de te minimaliseren functie luidt

$$(12.36) \quad f(x) = \sum_{j=1}^n x_j.$$

De bijvoorwaarden kunnen wij op de volgende wijze afleiden.

Laat n_{ij} het aantal i kopers zijn in de steekproef, die in district j

genomen wordt, en v_{ij} het aantal voorstanders onder hen. Wij gaan er van uit, dat de kans, dat n_{ij} gelijk is aan nul verwaarloosbaar klein is. Voor $n_{ij} \neq 0$ is het quotiënt

$$(12.37) \quad \underline{f}_{ij} = \frac{v_{ij}}{n_{ij}}$$

een schatter van de fractie voorstanders onder de i kopers in district j . Om tot schatters $\underline{f}_i$ te komen van de fracties voorstanders onder de merk i kopers in het gehele land wegen wij de fracties $\underline{f}_{ij}$ met de fracties a_{ij} van de i kopers die in district j wonen; a_{ij} is dus het quotiënt van het aantal kopers van merk i dat in district j woont en het totale aantal kopers van merk i in het gehele land. De grootte

$$(12.38) \quad \underline{f}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \underline{f}_{ij}$$

is een zuivere schatter van de fractie voorstanders in het gehele land onder de merk i kopers. De schattingen $\underline{f}_i$ worden gevonden door uit de n steekproeven alle quotiënten $\underline{f}_{ij}$ te berekenen en deze dan in formule (12.38) te substitueren.

Aangezien de steekproeven in de verschillende districten aselekt en onderling onafhankelijk worden genomen, zijn $\underline{f}_{i1}, \dots, \underline{f}_{in}$ onderling onafhankelijk.

Uit eis (b) volgt dat dan moet zijn voldaan aan de voorwaarden

$$(12.39) \quad \sigma^2(\underline{f}_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \sigma^2(\underline{f}_{ij}) \leq d \quad (i = 1, \dots, m).$$

De waarden van de $\sigma^2(\underline{f}_{ij})$ zijn onbekend, maar er kunnen wel bovengrenzen voor worden afgeleid.

Wij definiëren:

$$\begin{aligned} p_{1ij} &= \frac{\text{aantal } i \text{ kopers in district } j}{\text{totaal aantal kopers in district } j} \\ p_{2ij} &= \frac{\text{aantal voorstanders onder de } i \text{ kopers in district } j}{\text{totaal aantal kopers in district } j} \\ r_{ij} &= \frac{\text{aantal voorstanders onder de } i \text{ kopers in district } j}{\text{aantal } i \text{ kopers in district } j} \end{aligned}$$

De grootte n_{ij} kan opgevat worden als het aantal successen in een steek-

proef. We nemen aan, dat $\underline{n}_{ij}$ bij benadering verdeeld is volgens de binomiale verdeling $B(x_j, p_{1ij})$. Verder beschouwen we $\underline{v}_{ij}$, indien $\underline{n}_{ij} = n_{ij}$, als het aantal successen in een steekproef van de grootte n_{ij} uit de geënquêteerde i kopers in district j . Van $\underline{v}_{ij}$ nemen we aan, dat hij bij benadering verdeeld is volgens $B(n_{ij}, r_{ij})$. Enig rekenwerk leert, dat $\underline{v}_{ij}$ dan verdeeld is volgens $B(x_j, p_{2ij})$. Tevens geldt dan:

$$\text{cov}(\underline{n}_{ij}, \underline{v}_{ij}) = 0.$$

Voor de afschatting van $\sigma^2(\underline{f}_{ij})$ gaan we uit van de betrekking

$$(12.40) \quad \sigma^2\left(\frac{x}{y}\right) \approx \left(\frac{Ex}{Ey}\right)^2 \left[\frac{\sigma^2(x)}{(Ex)^2} + \frac{\sigma^2(y)}{(Ey)^2} - \frac{2\text{cov}(x,y)}{Ex \cdot Ey} \right] \quad *)$$

Bedenken wij, dat $\text{cov}(x, y)$ in ons geval gelijk is aan nul, dan blijkt

$$\sigma^2\left(\frac{\underline{v}_{ij}}{\underline{n}_{ij}}\right) \approx \left(\frac{Ev_{ij}}{En_{ij}}\right)^2 \left[\frac{\sigma^2(\underline{v}_{ij})}{(Ev_{ij})^2} + \frac{\sigma^2(\underline{n}_{ij})}{(En_{ij})^2} \right].$$

Verder volgen uit de definities van p_{1ij} en p_{2ij} de relaties $Ev_{ij} = x_j p_{2ij}$, $En_{ij} = x_j p_{1ij}$, $\sigma^2(\underline{v}_{ij}) = x_j p_{2ij} (1 - p_{2ij})$ en $\sigma^2(\underline{n}_{ij}) = x_j p_{1ij} (1 - p_{1ij})$. Substitueren wij deze uitdrukkingen in de bovenstaande formule, dan vinden wij

$$(12.41) \quad \begin{aligned} \sigma^2\left(\frac{\underline{v}_{ij}}{\underline{n}_{ij}}\right) &\approx \left(\frac{x_j p_{2ij}}{x_j p_{1ij}}\right)^2 \left[\frac{x_j p_{2ij} (1 - p_{2ij})}{(x_j p_{2ij})^2} + \frac{x_j p_{1ij} (1 - p_{1ij})}{(x_j p_{1ij})^2} \right] = \\ &= \frac{1}{x_j} \left(\frac{p_{2ij}}{p_{1ij}}\right)^2 \left[\frac{1 - p_{2ij}}{p_{2ij}} + \frac{1 - p_{1ij}}{p_{1ij}} \right]. \end{aligned}$$

Nu zijn de waarden van p_{1ij} en p_{2ij} onbekend. Desondanks kan $\sigma^2(\underline{f}_{ij})$ naar boven afgeschat worden. In de eerste plaats volgt uit $p_{1ij} \geq p_{2ij}$ de ongelijkheid

$$(12.42) \quad \sigma^2(\underline{f}_{ij}) \leq \frac{2}{x_j} \left(\frac{1 - p_{2ij}}{p_{2ij}} \right).$$

Geldt voor ieder merk in district j dat de fractie voorstanders tenminste gelijk is aan θ_j , dus is $p_{2ij} \geq \theta_j$ ($i=1, \dots, m$), dan leidt (12.42) tot

*) Vergelijk A.M. MOOD, F.A. GRAYBILL & D.C. BOES, *Introduction to the Theory of Statistics*, 3^{de} druk, McGraw Hill (1974), stelling 4, blz. 181.

$$(12.43) \quad \sigma^2(\underline{f}_{ij}) \leq \frac{2}{x_j} \cdot \frac{1 - \theta_j}{\theta_j}.$$

Voor de variantie van $\underline{f}_i$ volgt hieruit de bovengrens

$$(12.44) \quad \sigma^2(\underline{f}_i) \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \cdot \frac{2}{x_j} \cdot \frac{1 - \theta_j}{\theta_j}.$$

Eisen wij nu dat het rechterlid van deze ongelijkheid kleiner of gelijk aan d is, dan is zeker aan de gestelde voorwaarden voldaan. Wij vervangen daarom (12.39) door

$$(12.45) \quad 2 \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \cdot \frac{1 - \theta_j}{\theta_j} \cdot \frac{1}{x_j} \leq d \quad (i = 1, \dots, m).$$

De optimale waarden van de steekproefomvang x_j kunnen wij derhalve benaderen door (12.36) te minimaliseren onder de voorwaarden (12.45) en $x_j \geq 0$. Strikt genomen moet ook de eis x_j geheel gesteld worden, maar aangezien het hier steeds om vrij grote waarden van de x_j zal gaan, kan men beter eerst het geformuleerde probleem oplossen en daarna afronden op de dichtstbijgelegen gehele getallen.

Het oplossen van het probleem kan aanzienlijk worden vereenvoudigd door in plaats van de variabelen x_j de variabelen

$$(12.46) \quad u_j = \frac{1}{x_j}$$

te hanteren. In termen van de variabelen u_j gaat het probleem over in:

minimaliseer

$$(12.47) \quad \sum_{j=1}^n \frac{1}{u_j}$$

onder de voorwaarden

$$(12.48) \quad 2 \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \cdot \frac{1 - \theta_j}{\theta_j} u_j \leq d \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$(12.49) \quad U = (u_1 \dots u_n) \geq 0.$$

Dit is een zogenaamd *separabel convex programmeringsprobleem* omdat alle er in voorkomende functies de vorm

$$(12.50) \quad f(U) = \sum_{j=1}^n f_j(u_j)$$

bezitten, dus geschreven kunnen worden als sommen van functies van één variabele. Voor dit type problemen bestaan verschillende oplossingsmethoden; op één daarvan, een benadering met behulp van *lineaire knikfuncties*, zal in paragraaf 14 worden teruggekomen.

De hier beschreven aanpak van een steekproefprobleem kan ook worden gebruikt wanneer het niet gaat om verschillende merken van één produkt, maar om kenmerken van verschillende produkten. De rechterleden van (12.39) behoeven niet voor iedere i dezelfde waarde te bezitten.

VOORBEELD 12.5. Een kasbeheermodel onder onzekerheid. Onder kasbeheer wordt verstaan het korte termijn financiële beleid dat er voor zorg draagt dat de schommelingen in de behoefte aan kasgeld zo goed mogelijk worden opgevangen. In dit beleid zijn twee taken te onderscheiden: het aantrekken en verstrekken van kasgelden indien deze voor de overige activiteiten van de onderneming noodzakelijk zijn en het ontvangen en beleggen van kasgelden indien er overschotten zijn.

Als wij er van uitgaan dat het lange termijnplan van de onderneming vastligt, dan kunnen wij het kasbeheer als volgt omschrijven. Bepaal het tekort of het overschot aan kasgelden voor alle perioden van het planningsinterval. Wij noemen dit bedrag de behoefte aan kasgeld, welk bedrag positief is bij een tekort en negatief bij een overschot. Deze behoefte is gelijk aan de uitgaven verminderd met de ontvangsten ten gevolge van de overige activiteiten van de onderneming. Bepaal vervolgens bij een tekort hoe hierin tegen zo laag mogelijke kosten kan worden voorzien en bij een overschot hoe dit tegen een zo hoog mogelijke opbrengst kan worden belegd in korte termijnbeleggingsalternatieven, zoals direct verhandelbare effecten en deposito's.

We formuleren nu een model voor het kasbeheer waarbij we uitgaan van de volgende onderstellingen:

(a) het lange termijnplan van de onderneming is bekend; hieruit volgen voorwaarden voor het korte termijnbeleid zoals de maximale hoeveelheid kort vermogen welke op een bepaald moment aanwezig mag zijn, en de maximaal in direct verhandelbare effecten te beleggen hoeveelheid kort vermogen;

(b) de doelstelling van het kasbeheer is maximalisatie van de som van de totale opbrengst van het korte vermogen in het planningsinterval van τ planperioden en de waarde van de uitzettingen minus de verplichting tijdstip τ ;

(c) de beslissingen worden periodiek aan het begin van iedere planperiode genomen, de gevolgen van vroegere beslissingen zijn dan bekend;

(d) de financierings- en beleggingsmogelijkheden zijn bekend, evenals de hierdoor opgeroepen uitgaven en ontvangsten;

(e) de behoefte aan kasgeld die volgt uit de overige activiteiten van de onderneming is op de begintijdstippen van de planperioden een stochastische grootheid waarvan de kansverdeling bekend is;

(f) alle financieringsvormen moeten lineair worden afgelost, dat wil zeggen dat vervroegd aflossen niet mogelijk is; in iedere periode moet dus een vast percentage van het uitstaande bedrag worden terugbetaald;

(g) men mag niet te vaak illiquide raken; aan een plotselinge vraag naar kasgelden waaraan niet vanuit de kasvoorraad kan worden voldaan kan via andere mogelijkheden zoals uitstel van betaling worden tegemoet gekomen, mits hierop niet te vaak een beroep moet worden gedaan.

Wij delen het planningsinterval in τ perioden in, waarbij de h^{de} periode loopt van $h - 1$ tot h , inclusief het begintijdstip $h - 1$, het moment waarop alle beslissingen voor deze periode worden genomen, maar exclusief het tijdstip h . Het tijdstip τ , de planhorizon, wordt in het model opgenomen, teneinde de waarde van beleggingen en aangegane kredietverplichtingen expliciet in de doelfunctie op te kunnen nemen.

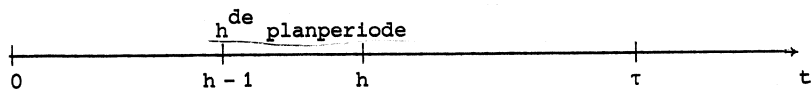


fig. 12.4

Het planningsinterval $[0, \tau]$, verdeeld in τ planperioden

We definiëren nu de volgende grootheden:

x_{it} het aantal duizenden guldens aangehouden in beleggingsvorm i ($i=1, \dots, p$) op tijdstip t ($t=0, \dots, \tau-1$), nadat de beslissingen genomen zijn;

- x_{it} het aantal duizenden guldens van financieringsvorm i ($i=p+1, \dots, n$) dat op tijdstip t ($t=0, \dots, \tau-1$) aanwezig is, nadat de beslissingen genomen zijn;
- r_{it} de marktprijs van beleggingsvorm i op tijdstip t als fractie van de marktprijs op tijdstip $t-1$;
- ρ_{it} de opbrengst van beleggingsvorm i ($i=1, \dots, p$) die beschikbaar komt op tijdstip t ($t=0, \dots, \tau-1$) als fractie van het belegde bedrag;
- ρ_{it} de kosten op tijdstip t ($t=0, \dots, \tau-1$) voor financieringsvorm i ($i=p+1, \dots, n$) als fractie van het aangehouden bedrag in de voorgaande periode;
- c_{it} de transactiekosten van beleggingsvorm i ($i=1, \dots, p$) op tijdstip t ($t=0, \dots, \tau-1$) als fractie van het aangekochte of verkochte bedrag;
- c_{it} de transactiekosten van financieringsvorm i ($i=p+1, \dots, n$) op tijdstip t ($t=0, \dots, \tau-1$) als fractie van het bedrag van de afgesloten financiering;
- a_i het aflossingspercentage van financieringsvorm i ($i=p+1, \dots, n$);
- $\underline{b}_t$ de behoefte aan kasgeld van de overige activiteiten van de onderneming in periode t ($t=1, \dots, \tau$);
- ϵ_t de op tijdstip t aanvaardbaar geachte kans op illiquide raken in periode $t+1$ ($t=0, \dots, \tau-1$);
- $\underline{l}_t$ de aan het einde van periode t ($t=1, \dots, \tau$) aanwezige hoeveelheid kasgeld, in het vervolg de kasvoorraad van de onderneming te noemen.

We nemen aan dat de in het verleden genomen beslissingen geresulteerd hebben in beleggingen $x_{i,-1}$ ($i=1, \dots, p$), financieringen $x_{i,-1}$ ($i=p+1, \dots, n$) en een kasvoorraad $\underline{l}_0$, dus $P[\underline{l}_0 = \underline{l}_0] = 1$.

De kasvoorraad $\underline{l}_t$ is gelijk aan de som van de volgende componenten:

- de kasvoorraad aan het einde van periode $t-1$: $\underline{l}_{t-1}$;
- de ontvangsten uit beleggingsmogelijkheid i ($i=1, \dots, p$) op tijdstip $t-1$: $\rho_{i,t-1} x_{i,t-2}$;
- de op tijdstip $t-1$ van beleggingsmogelijkheid i ($i=1, \dots, p$) verkochte hoeveelheid: $r_{i,t-1} x_{i,t-2} - x_{i,t-1}$ (als $r_{i,t-1} x_{i,t-2} \geq x_{i,t-1}$);
- de op tijdstip $t-1$ aangetrokken hoeveelheid van financieringsvorm i ($i=p+1, \dots, n$): $x_{i,t-1} - (1-a_i)x_{i,t-2}$, waarbij $x_{i,t-1} \geq (1-a_i)x_{i,t-2}$ vermindert met de som van de volgende componenten:

- de op tijdstip $t - 1$ van beleggingsmogelijkheid i ($i=1, \dots, p$) aangekochte hoeveelheid: $x_{i,t-1} - r_{i,t-1}x_{i,t-2}$ (als $x_{i,t-1} > r_{i,t-1}x_{i,t-2}$);
 - de transactiekosten bij aan- en verkoop van beleggingen op tijdstip $t - 1$: $c_{i,t-1} |r_{i,t-1}x_{i,t-2} - x_{i,t-1}|$ ($i=1, \dots, p$);
 - de transactiekosten bij het aantrekken van financieringsvorm i ($i=p+1, \dots, n$) op tijdstip $t - 1$: $c_{i,t-1}(x_{i,t-1} - (1-a_i)x_{i,t-2})$;
 - de rente-uitgaven voor de financieringsmogelijkheid i ($i=p+1, \dots, n$) op tijdstip $t - 1$: $\rho_{i,t-1}x_{i,t-2}$;
 - de aflossingsverplichting van financieringsvorm i ($i=p+1, \dots, n$) op tijdstip $t - 1$: $a_i x_{i,t-2}$;
 - de behoefte aan kasgeld van de overige activiteiten in periode t : b_t .
- In formulevorm betekent dit:

$$\begin{aligned}
 (12.51) \quad \underline{1}_t = \underline{1}_{t-1} - \underline{b}_t + \sum_{i=1}^p (\rho_{i,t-1}x_{i,t-2} + r_{i,t-1}x_{i,t-2} - x_{i,t-1} - \\
 - c_{i,t-1} |r_{i,t-1}x_{i,t-2} - x_{i,t-1}|) - \\
 - \sum_{i=p+1}^n (\rho_{i,t-1}x_{i,t-2} + x_{i,t-2} - x_{i,t-1} + \\
 + c_{i,t-1}(x_{i,t-1} - (1-a_i)x_{i,t-2})) \\
 (t = 1, \dots, \tau).
 \end{aligned}$$

Hierbij zijn in de laatste term, die de invloeden van de bedragen in de financieringsvormen op de kas aangeeft, de aflossing en het aantrekken van financieringsmiddelen samengenomen. Omdat moet gelden dat van iedere financieringsvorm op tijdstip t tenminste het op tijdstip $t - 1$ aanwezige bedrag verminderd met de aflossing aanwezig moet zijn, moet als voorwaarde in het model worden opgenomen:

$$(12.52) \quad x_{it} \geq (1-a_i)x_{i,t-1} \quad (i = p+1, \dots, n; t = 0, \dots, \tau-1).$$

We herleiden (12.51) nog tot de volgende uitdrukking:

$$\begin{aligned}
 (12.53) \quad \underline{1}_t = \underline{1}_0 + \sum_{j=1}^t [-\underline{b}_j + \sum_{i=1}^p \{ (\rho_{i,j-1} + r_{i,j-1}) x_{i,j-2} - x_{i,j-1} - \\
 - c_{i,j-1} |r_{i,j-1} x_{i,j-2} - x_{i,j-1}| \} - \\
 - \sum_{i=p+1}^n \{ (\rho_{i,j-1} + 1) x_{i,j-2} - x_{i,j-1} + \\
 + c_{i,j-1} (x_{i,j-1} - (1-a_i) x_{i,j-2}) \}].
 \end{aligned}$$

De voorwaarden die uit onderstelling a volgen zijn voor ieder tijdstip t te formuleren als m lineaire bijvoorwaarden waarin de coëfficiënten a_{jit} en a_{jot} gegeven zijn:

$$(12.54) \quad \sum_{i=1}^n a_{jit} x_{it} \leq a_{jot} \quad (t = 0, \dots, \tau-1; j = 1, \dots, m).$$

Het kasbeheermodel kan nu als volgt worden geformuleerd:

maximaliseer

$$\begin{aligned}
 (12.55) \quad \sum_{t=0}^{\tau-1} \left[\sum_{i=1}^p (\rho_{it} x_{i,t-1} - c_{it} |r_{it} x_{i,t-1} - x_{it}|) - \right. \\
 \left. - \sum_{i=p+1}^n (\rho_{it} x_{i,t-1} + c_{it} (x_{it} - (1-a_i) x_{i,t-1})) \right] + \\
 + \sum_{i=1}^p x_{i,\tau-1} - \sum_{i=p+1}^n x_{i,\tau-1}
 \end{aligned}$$

onder de voorwaarden

$$(12.56) \quad \sum_{i=1}^n a_{jit} x_{it} \leq a_{jot} \quad (t = 0, \dots, \tau-1; j = 1, \dots, m),$$

$$(12.57) \quad P[\underline{1}_t \leq 0] \leq \epsilon_t \quad (t = 1, \dots, \tau),$$

$$(12.58) \quad x_{it} \geq (1-a_i) x_{i,t-1} \quad (t = 0, \dots, \tau-1; i = p+1, \dots, n)$$

$$(12.59) \quad x_{it} \geq 0 \quad (t = 0, \dots, \tau-1; i = 1, \dots, n).$$

Indien de bedragen $\underline{b}_j$ normaal verdeeld zijn met verwachtingen μ_j , varianties σ_{jj} en covarianties σ_{ij} , dan geldt voor de grootheden $\underline{1}_t$ dat deze normaal verdeeld zijn met verwachtingen

$$(12.60) \quad m_t = l_0 + \sum_{j=1}^t \left\{ -\mu_j + \sum_{i=1}^p ((\rho_{i,j-1} + r_{i,j-1})x_{i,j-2} - x_{i,j-1} - c_{i,j-1} |r_{i,j-1}x_{i,j-2} - x_{i,j-1}|) - \sum_{i=p+1}^n ((\rho_{i,j-1} + 1)x_{i,j-2} - x_{i,j-1} + c_{i,j-1}(x_{i,j-1} - (1-a_i)x_{i,j-2})) \right\},$$

vergelijk (12.53), en standaardafwijkingen

$$(12.61) \quad s_t = \sqrt{\sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^n \sigma_{ij}}.$$

Voorwaarde (12.57) is nu te herschrijven als

$$(12.62) \quad P\left[\frac{l_t - m_t}{s_t} \leq -\frac{m_t}{s_t}\right] \leq \varepsilon_t,$$

waarin

$$\frac{l_t - m_t}{s_t} = u_t$$

een $N(0,1)$ verdeelde stochastische variabele is. Is ξ_{ε_t} gedefinieerd door

$$P[u \leq \xi_{\varepsilon_t}] = \varepsilon_t,$$

dan volgt dat (12.62) te schrijven is als

$$(12.63) \quad m_t \geq -\xi_{\varepsilon_t} s_t.$$

Substitutie van (12.60) en (12.61) geeft dan

$$(12.64) \quad \sum_{j=1}^t \left\{ \sum_{i=1}^p ((\rho_{i,j-1} + r_{i,j-1})x_{i,j-2} - x_{i,j-1} - c_{i,j-1} |r_{i,j-1}x_{i,j-2} - x_{i,j-1}|) - \sum_{i=p+1}^n ((\rho_{i,j-1} + 1)x_{i,j-2} - x_{i,j-1} + c_{i,j-1}(x_{i,j-1} - (1-a_i)x_{i,j-2})) \right\} \geq \\ \geq -l_0 + \sum_{j=1}^t \mu_j - \xi_{\varepsilon_t} \sqrt{\sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^n \sigma_{ij}} \quad (t = 1, \dots, \tau).$$

Worden aan het model de voorwaarden

$$(12.65) \quad r_{ij}x_{i,j-1} - x_{ij} = v_{ij1} - v_{ij2}$$

$$(12.66) \quad v_{ij1} \geq 0, \quad v_{ij2} \geq 0$$

toegevoegd, en wordt voor $|r_{ij}x_{i,j-1} - x_{ij}|$ gesubstitueerd $v_{ij1} + v_{ij2}$, dan is een lineair programmeringsmodel ontstaan zodat de oplossing van het oorspronkelijke model met behulp van de simplexmethode kan worden berekend.

Onderstellen we dat zowel de opbrengsten ρ_{it} als de marktprijzen i_t van de beleggingen stochastische grootheden zijn, dan ontstaat geen lineair programmeringsmodel, omdat de variantie van de liquiditeit niet langer onafhankelijk is van de beslissingsvariabelen. Indien we nu verder ter vereenvoudiging onderstellen dat aan aan- en verkoop van beleggingen geen transactiekosten verbonden zijn evenals aan het aantrekken van financieringsmiddelen, dan is het gestelde probleem te beschrijven met behulp van een convex niet-lineair programmeringsmodel. De kasvoorraad is dan te schrijven als:

$$l_t = l_0 + \sum_{j=1}^t \left\{ -b_j + \sum_{i=1}^p (\rho_{i,j-1} + r_{i,j-1})x_{i,j-2} - x_{i,j-1} - \sum_{i=p+1}^n (\rho_{i,j-1} + 1)x_{i,j-2} - x_{i,j-1} \right\}.$$

Stel dat de sommen van de fractionele opbrengsten en de marktprijzen van beleggingsmogelijkheid i op de tijdstippen t , q_{it} ($i=1, \dots, p$; $t=0, \dots, T-1$) normaal verdeeld zijn met verwachtingen q_{it} en covarianties $c_{it,js}$. De verwachting m_t van de beschikbare kasvoorraad op tijdstip t is dan gelijk aan:

$$(12.67) \quad m_t = l_0 + \sum_{j=1}^t \left\{ -\mu_j + \sum_{i=1}^p (q_{i,j-1}x_{i,j-2} - x_{i,j-1}) - \sum_{i=p+1}^n ((\rho_{i,j-1} + 1)x_{i,j-2} - x_{i,j-1}) \right\}$$

en de standaardafwijking s_t is:

$$(12.68) \quad s_t = \sqrt{\sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^t \left\{ \sigma_{ij} + \sum_{h=1}^p \sum_{k=1}^p x_{h,j-2} c_{h,j-1;i,k-1} x_{i,k-2} \right\}}.$$

Voorwaarde (12.63) vervangen we door:

$$(12.69) \quad m_t^2 \geq \xi_{\epsilon_t}^2 s_t^2,$$

welke voorwaarde met behulp van (12.66) en (12.68) te schrijven is als:

$$(12.70) \quad h_t(x) \geq 0,$$

waarbij x de vector van beslissingsvariabelen $(x_{10}, \dots, x_{n, \tau-1})$ voorstelt. Men kan bewijzen dat de functies $h_t(x)$ convex zijn.*) Het model maximaliseer de verwachting van de opbrengst:

$$(12.71) \quad \sum_{t=0}^{\tau-1} \left(\sum_{i=1}^p \rho_{it} x_{it-1} - \sum_{i=p+1}^n \rho_{it} x_{it-1} \right) + \sum_{i=1}^p x_{i\tau-1} - \sum_{i=p+1}^n x_{i\tau-1}$$

onder de voorwaarden (12.56) tot en met (12.59) is onder de gemaakte onderstellingen dan te transformeren tot een convex programmeringsmodel.

VOORBEELD 12.6. Een produktieprobleem. Een onderneming produceert de produkten 1 tot en met n en heeft hierbij de produktiefactoren 1 tot en met m nodig. Aan het begin van een produktieperiode beschikt men over de hoeveelheden b_1 tot en met b_m van deze factoren, die verder voor de komende periode niet meer bijgekocht kunnen worden. Voor het produceren van het goederenpakket $X' = (x_1, \dots, x_n)$ is van de i de produktiefactor een hoeveelheid $g_i(x)$ nodig ($i=1, \dots, m$), waarin $g_i(x)$ een convexe differentieerbare functie is. De netto-opbrengst van deze produktie wordt voorgesteld door de concave, differentieerbare functie $f(x)$. Wil de onderneming deze opbrengst voor de komende periode maximaliseren, dan dient men het standaard convexe programmeringsprobleem,

maximaliseer

$$(12.72) \quad y = f(x)$$

*) Zie C. VAN DE PANNE & W. POPP, *Minimum-cost cattlefeed under probabilistic protein constraints*, Management Science 9 (1963), blz. 405-430. Het mengprobleem met een stochastische bijvoorwaarde is een van de oudste voorbeelden van een optimaliseringsmodel waarin met het stochastische karakter van een bijvoorwaarde expliciet rekening werd gehouden.

onder de voorwaarden

$$(12.73) \quad g_i(x) \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$x \geq 0$$

op te lossen. Het is een generalisatie van de produktieproblemen 5.3 en 5.4 uit deel 6A van deze Leergang. Voor een bepaald eenvoudig probleem uit de automobiellindustrie is het onder andere geanalyseerd door DORFMAN e.a.*) De grootste moeilijkheid bij dit soort problemen is meestal het schatten van de functies $f(x)$ en $g_i(x)$.

De LAGRANGE-functie die bij dit probleem hoort, luidt

$$(12.74) \quad \phi(x, t) = f(x) + \sum_{i=1}^m t_i [b_i - g_i(x)] + \sum_{j=1}^n t_{m+j} \cdot x_j;$$

vergelijk (11.30) met $h_i(x)$ gedefinieerd door (10.15). Wanneer wij aannemen dat in het optimum alle n produkten ook werkelijk gemaakt worden, dus $\bar{x}_j > 0$ voor $j = 1, \dots, n$, dan geldt volgens stelling 11.3, $\bar{t}_{m+1} = \dots = \bar{t}_{m+n} = 0$. De laatste term van (12.74) kan dus weggelaten worden. Aan de optimale waarden van de LAGRANGE-vermenigvuldigers $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m$ kan dan een economische interpretatie worden gegeven.

Voor het geval er één bijvoorwaarde $g(x) = b$ is kunnen wij dit inzien door de voorwaarden (11.4) en (11.6) uit stelling 11.3 toe te passen. De optimale waarden $\bar{x}$ en $\bar{t}$ van x en t blijken dan te moeten voldoen aan

$$(12.75) \quad \nabla f(\bar{x}) + \bar{t} \nabla h(\bar{x}) = 0$$

en

$$(12.76) \quad \bar{t} \geq 0.$$

Voorwaarde (12.75) is gelijkwaardig aan

$$(12.77) \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}) = \bar{t} \cdot \frac{\partial g(\bar{x})}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, n).$$

*) R. DORFMAN, P.A. SAMUELSON & R.M. SOLOW, *Linear Programming and Economic Analysis*, MacGraw Hill, New York (1958), hfdst. 6, paragraaf 2 en hfdst. 8, paragraaf 1.

Wanneer wij nu de waarde van b laten variëren, dan worden de optimale waarden $\bar{x}$ en $\bar{t}$ en dus ook de optimale waarde $\bar{y} = f(\bar{x})$ functies van b , dus

$$(12.78) \quad \bar{y} = k(b).$$

De wijze waarop $\bar{y}$ afhankelijk is van b volgt uit de afgeleide van $k(b)$ naar b , welke gelijk is aan

$$(12.79) \quad \frac{dk(b)}{db} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \bar{x}_j} \cdot \frac{d\bar{x}_j}{db}$$

(vergelijk formule (12.5) uit deel 1 van deze Leergang). Substitueren wij hierin (12.77), dan blijkt

$$(12.80) \quad \frac{dk(b)}{db} = \bar{t} \sum_{j=1}^n \frac{\partial g(\bar{x})}{\partial \bar{x}_j} \cdot \frac{d\bar{x}_j}{db}.$$

Verder geldt voor alle $\bar{x}$ en b

$$(12.81) \quad g(\bar{x}) = b,$$

zodat

$$(12.82) \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial g(\bar{x})}{\partial \bar{x}_j} \frac{d\bar{x}_j}{db} = 1.$$

Vullen wij dit in (12.80) in, dan verkrijgen wij

$$(12.83) \quad \frac{dk(b)}{db} = \bar{t}.$$

Dit betekent dat, wanneer er onder de voorwaarde $g(x) = b$ optimaal wordt geproduceerd, de afgeleide van de opbrengst gelijk is aan de (niet-negatieve) waarde van de LAGRANGE-vermenigvuldiger die bij de opgelegde voorwaarde hoort. Anders gezegd, de marginale waarde, of het "grensnut" van de capaciteit b is gelijk aan de bij het optimum behorende waarde van de LAGRANGE-vermenigvuldiger. Uit voorwaarde (11.7) van stelling 11.3 volgt dat deze nul is wanneer $h(\bar{x}) < 0$ of $g(\bar{x}) < b$.

ZANGWILL^{*)} toont aan dat, wanneer er meer voorwaarden zijn van de

^{*)} W.I. ZANGWILL, *Nonlinear Programming: A unified Approach*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1969), blz. 66-68.

vorm (12.73) een vergelijkbare eigenschap geldt, namelijk

$$(12.84) \quad \frac{\partial k(B)}{\partial b_i} = \bar{t}_i,$$

waaraan een overeenkomstige betekenis kan worden toegekend als aan (12.83). De LAGRANGE-vermenigvuldigers spelen hier dus dezelfde rol als de schaduw-prijzen in de lineaire programmering, vergelijk blz. 130-131 uit deel 6A van deze Leergang. Deze overeenkomst was ook reeds gebleken in voorbeeld 11.4.

VOORBEELD 12.7. Wiskundige economie. De in de paragrafen 10 en 11 behandelde theorie vormt een onderdeel van de "convexe analyse". Deze speelt niet alleen een belangrijke rol in de convexe programmering maar eveneens in de wiskundige economie, waardoor er tussen de beide vakgebieden een grote verwantschap bestaat. Ter illustratie van de problematiek die men in de wiskundige economie bestudeert, geven wij hier een zeer vereenvoudigd voorbeeld uit de zogenaamde evenwichtstheorie.

Op een markt worden n verschillende goederen verhandeld. De consument kan deze kopen of verkopen tegen de prijzen $p_1, \dots, p_n$ per eenheid. Wij vatten de prijzen samen in de vector $P' = (p_1, \dots, p_n)$. Het inkomen van de consument bedraagt $\lambda(P)$. Wanneer hij $x_1, \dots, x_n$ eenheden van de goederen 1 t/m n koopt of verkoopt, geeft hem dit een bevrediging die wordt uitgedrukt door de continue concave nutsfunctie $u(x_1, \dots, x_n) = u(X)$. De consument wil nu $u(X)$ maximaliseren onder de voorwaarde

$$(12.85) \quad \sum_{j=1}^n p_j x_j = P'X \leq \lambda(P).$$

Bij de bestudering van dit probleem is men in de wiskundige economie niet in de eerste plaats geïnteresseerd in de numerieke oplossing, maar vooral in het gedrag van de verzameling van optimale waarden van X wanneer men P varieert. Is $\bar{X}(P)$ bij gegeven P een optimale waarde van X , dan onderzoekt men dus het gedrag van de verzameling van de waarden $\bar{X}(P)$ als functie van P .

Tegenover de consument staat de producent. Deze kan kiezen uit bepaalde input-output combinaties $Y' = (y_1, \dots, y_n)$ van de goederen 1 t/m n . Zijn de prijzen $p_1, \dots, p_n$ per eenheid dan is zijn winst bij een gegeven combinatie $y_1, \dots, y_n$ gelijk aan

$$(12.86) \quad \pi(Y) = \sum_{j=1}^n p_j y_j = P'Y.$$

Door technologische beperkingen kan de producent Y niet vrij kiezen, maar moet Y gekozen worden uit een verzameling Y , waarvan wij aannemen dat deze convex is. De producent tracht nu $\pi(Y)$ te maximaliseren onder de voorwaarde $Y \in Y$. Ook hier is men in de wiskundige economie niet zo zeer geïnteresseerd in de numerieke oplossing van het probleem, maar meer in het gedrag van de optimale vector $\bar{Y}$ als functie van de prijzen P .

In het geval waarin er één consument is en één producent spreken wij van een *evenwicht* op de markt als er vectoren $\bar{X}$, $\bar{Y}$ en P bestaan, zodanig dat

- (a) $\bar{X} = \bar{Y}$ (of $\bar{X} \leq \bar{Y}$),
- (b) $\bar{X}$ de nutsfunctie $u(X)$ maximaliseert,
- (c) $\bar{Y}$ de winstfunctie $\pi(Y)$ maximaliseert,
- (d) $\pi = \lambda$.

In de wiskundige economie bestudeert men allerlei generalisaties van dit probleem. Wij verwijzen hiervoor naar de literatuur, bijvoorbeeld E. MALINVAUD^{*)} of H. TAKAYAMA.^{**)}

^{*)} E. MALINVAUD, *Lectures in Micro Economic Theory*, North-Holland Amsterdam (1972).

^{**)} A. TAKAYAMA, *Mathematical Economics*, The Dryden Press, Hinsdale (1974).

LITERATUUR

- LAWLER, E.G., *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*, Holt, Rinehart and Winston, New York (1976).
- LUENBERGER, D.G., *Introduction to linear and nonlinear programming*, Addison-Addison-Wesley, Reading, Mass. (1973).
- MANGASARIAN, O.L., *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York (1969).
- ROCKAFELLAR, R.T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1970).
- ZANGWILL, W.J., *Nonlinear Programming: A Unified Approach*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1969).
- ZOUTENDIJK, G., *Mathematical Programming Methods*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1976).

UITGAVEN IN DE SERIE MC SYLLABUS

Onderstaande uitgaven zijn verkrijgbaar bij het Mathematisch Centrum,
2e Boerhaavestraat 49 te Amsterdam-1005, tel. 020-947272.

-
- | | |
|----------|---|
| MCS 1.1 | F. GÖBEL & J. VAN DE LUNE, <i>Leergang Besliskunde, deel 1: Wiskundige basiskennis</i> , 1965. ISBN 90 6196 014 2. |
| MCS 1.2 | J. HEMELRIJK & J. KRIENS, <i>Leergang Besliskunde, deel 2: Kansberekening</i> , 1965. ISBN 90 6196 015 0. |
| MCS 1.3 | J. HEMELRIJK & J. KRIENS, <i>Leergang Besliskunde, deel 3: Statistiek</i> , 1966. ISBN 90 6196 016 9. |
| MCS 1.4 | G. DE LEVE & W. MOLENAAR, <i>Leergang Besliskunde, deel 4: Markovketens en wachttijden</i> , 1966. ISBN 90 6196 017 7. |
| MCS 1.5 | J. KRIENS & G. DE LEVE, <i>Leergang Besliskunde, deel 5: Inleiding tot de mathematische besliskunde</i> , 1966. ISBN 90 6196 018 5. |
| MCS 1.6a | B. DORHOUT & J. KRIENS, <i>Leergang Besliskunde, deel 6a: Wiskundige programmering 1</i> , 1968. ISBN 90 6196 032 0. |
| MCS 1.6b | B. DORHOUT, J. KRIENS & J. TH. VAN LIESHOUT, <i>Leergang Besliskunde, deel 6b: Wiskundige programmering 2</i> , 1977. ISBN 90 6196 150 5. |
| MCS 1.7a | G. DE LEVE, <i>Leergang Besliskunde, deel 7a: Dynamische programmering 1</i> , 1968. ISBN 90 6196 033 9. |
| MCS 1.7b | G. DE LEVE & H.C. TIJMS, <i>Leergang Besliskunde, deel 7b: Dynamische programmering 2</i> , 1970. ISBN 90 6196 055 X. |
| MCS 1.7c | G. DE LEVE & H.C. TIJMS, <i>Leergang Besliskunde, deel 7c: Dynamische programmering 3</i> , 1971. ISBN 90 6196 066 5. |
| MCS 1.8 | J. KRIENS, F. GÖBEL & W. MOLENAAR, <i>Leergang Besliskunde, deel 8: Minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie</i> , 1968. ISBN 90 6196 034 7. |
| MCS 2.1 | G.J.R. FÖRCH, P.J. VAN DER HOUWEN & R.P. VAN DE RIET, <i>Colloquium Stabiliteit van differentieschema's, deel 1</i> , 1967. ISBN 90 6196 023 1. |
| MCS 2.2 | L. DEKKER, T.J. DEKKER, P.J. VAN DER HOUWEN & M.N. SPIJKER, <i>Colloquium Stabiliteit van differentieschema's, deel 2</i> , 1968. ISBN 90 6196 035 5. |
| MCS 3.1 | H.A. LAUWERIER, <i>Randwaardeproblemen, deel 1</i> , 1967. ISBN 90 6196 024 X. |
| MCS 3.2 | H.A. LAUWERIER, <i>Randwaardeproblemen, deel 2</i> , 1968. ISBN 90 6196 036 3. |
| MCS 3.3 | H.A. LAUWERIER, <i>Randwaardeproblemen, deel 3</i> , 1968. ISBN 90 6196 043 6. |
| MCS 4 | H.A. LAUWERIER, <i>Representaties van groepen</i> , 1968. ISBN 90 6196 037 1. |

- MCS 5 J.H. VAN LINT, J.J. SEIDEL & P.C. BAAYEN, *Colloquium Discrete wiskunde*, 1968.
ISBN 90 6196 044 4.
- MCS 6 K.K. KOKSMA, *Cursus ALGOL 60*, 1969. ISBN 90 6196 045 2.
- MCS 7.1 *Colloquium Moderne rekenmachines, deel 1*, 1969. ISBN 90 6196 046 0.
- MCS 7.2 *Colloquium Moderne rekenmachines, deel 2*, 1969. ISBN 90 6196 047 9.
- MCS 8 H. BAVINCK & J. GRASMAN, *Relaxatietrillingen*, 1969.
ISBN 90 6196 056 8.
- MCS 9.1 T.M.T. COOLEN, G.J.R. FÖRCH, E.M. DE JAGER & H.G.J. PIJLS, *Elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1*, 1970.
ISBN 90 6196 048 7.
- MCS 9.2 W.P. VAN DEN BRINK, T.M.T. COOLEN, B. DIJKHUIS, P.P.N. DE GROEN, P.J. VAN DER HOUWEN, E.M. DE JAGER, N.M. TEMME & R.J. DE VOGELAERE, *Colloquium Elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 2*, 1970.
ISBN 90 6196 049 5.
- MCS 10 J. FABIUS & W.R. VAN ZWET, *Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening*, 1970. ISBN 90 6196 057 6.
- MCS 11 H. BART, M.A. KAASHOEK, H.G.J. PIJLS, W.J. DE SCHIPPER & J. DE VRIES, *Colloquium Halfalgebra's en positieve operatoren*, 1971.
ISBN 90 6196 067 3.
- MCS 12 T.J. DEKKER, *Numerieke algebra*, 1971. ISBN 90 6196 068 1.
- MCS 13 F.E.J. KRUSEMAN ARETZ, *Programmeren voor rekenautomaten; De MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8*, 1971. ISBN 90 6196 069 x.
- MCS 14 H. BAVINCK, W. GAUTSCHI & G.M. WILLEMS, *Colloquium Approximatie-theorie*, 1971. ISBN 90 6196 070 3.
- MCS 15.1 T.J. DEKKER, P.W. HEMKER & P.J. VAN DER HOUWEN, *Colloquium Stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1*, 1972. ISBN 90 6196 078 9.
- MCS 15.2 P.A. BEENTJES, K. DEKKER, H.C. HEMKER, S.P.N. VAN KAMPEN & G.M. WILLEMS, *Colloquium Stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2*, 1973. ISBN 90 6196 079 7.
- MCS 15.3 P.A. BEENTJES, K. DEKKER, P.W. HEMKER & M. VAN VELDTHUIZEN, *Colloquium Stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3*, 1975.
ISBN 90 6196 118 1.
- MCS 16.1 L. GEURTS, *Cursus Programmeren, deel 1: De elementen van het programmeren*, 1973. ISBN 90 6196 080 0.
- MCS 16.2 L. GEURTS, *Cursus Programmeren, deel 2: De programmeertaal ALGOL 60*, 1973. ISBN 90 6196 087 8.
- MCS 17.1 P.S. STOBBE, *Lineaire algebra, deel 1*, 1974. ISBN 90 6196 090 8.
- MCS 17.2 P.S. STOBBE, *Lineaire algebra, deel 2*, 1974. ISBN 90 6196 091 6.
- MCS 17.3 N.M. TEMME, *Lineaire algebra, deel 3*, 1976. ISBN 90 6196 123 8.
- MCS 18 F. VAN DER BLIJ, H. FREUDENTHAL, J.J. DE IONGH, J.J. SEIDEL & A. VAN WIJNGAARDEN, *Een kwart eeuw wiskunde 1946-1971, Syllabus van de Vakantiecursus 1971*, 1974. ISBN 90 6196 092 4.
- MCS 19 A. HORDIJK, R. POTHARST & J.Th. RUNNENBURG, *Optimaal stoppen van Markovketens*, 1974. ISBN 90 6196 093 2.

- MCS 20 T.M.T. COOLEN, P.W. HEMKER, P.J. VAN DER HOUWEN & E. SLAGT, *ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen*, 1976. ISBN 90 6196 094 0.
- MCS 21 J.W. DE BAKKER (red.), *Colloquium Programmacorrectheid*, 1975. ISBN 90 6196 103 3.
- MCS 22 R. HELMERS, F.H. RUYMGAART, M.C.A. VAN ZUYLEN & J. OOSTERHOFF, *Asymptotische methoden in de toetsingstheorie; Toepassingen van naburigheid*, 1976. ISBN 90 6196 104 1.
- MCS 23.1 J.W. DE ROEVER (red.), *Colloquium Onderwerpen uit de biomathematica, deel 1*, 1976. ISBN 90 6196 105 x.
- * MCS 23.2 J.W. DE ROEVER (red.), *Colloquium Onderwerpen uit de biomathematica, deel 2*, 1976. ISBN 90 6196 115 7.
- MCS 24.1 P.J. VAN DER HOUWEN, *Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen, deel 1: Eenstapsmethoden*, 1974. ISBN 90 6196 106 8.
- MCS 25 *Colloquium Structuur van programmeertalen*, 1976. ISBN 90 6196 116 5.
- MCS 26.1 N.M. TEMME (ed.), *Nonlinear analysis, volume 1*, 1976. ISBN 90 6196 117 3.
- MCS 26.2 N.M. TEMME (ed.), *Nonlinear analysis, volume 2*, 1976. ISBN 90 6196 121 1.
- MCS 27 M. BAKKER, P.W. HEMKER, P.J. VAN DER HOUWEN, S.J. POLAK & M. VAN VELDHUIZEN, *Colloquium Discretiseringsmethoden*, 1976. ISBN 90 6196 124 6.
- MCS 28 O. DIEKMANN, N.M. TEMME (EDS), *Nonlinear Diffusion Problems*, 1976. ISBN 90 6196 126 2.
- MCS 29.1 J.C.P. BUS (red.), *Colloquium Numerieke programmatuur, deel 1A, deel 1B*, 1976. ISBN 90 6196 128 9.
- * MCS 29.2 H.J.J. TE RIELE (red.), *Colloquium Numerieke programmatuur, deel 2*, 1976. ISBN 144 0.
- * MCS 30 P. GROENEBOOM, R. HELMERS, J. OOSTERHOFF & R. POTHARST, *Efficiency begrippen in de statistiek*, 1977. ISBN 90 6196 149 1.
- MCS 31 J.H. VAN LINT (red.), *Inleiding in de coderingstheorie*, 1976. ISBN 90 6196 136 x.
- MCS 32 L. GEURTS (red.), *Colloquium Bedrijfssystemen*, 1976. ISBN 90 6196 137 8.
- * MCS 33 P.J. VAN DER HOUWEN, *Differentieschema's voor de berekening van waterstanden in zeeën en rivieren*, ISBN 90 6196 138 6.
- * MCS 34 J. HEMELRIJK, *Oriënterende cursus mathematische statistiek*, ISBN 90 6196 139 4.
- * MCS 35 P.J.W. TEN HAGEN (red.), *Colloquium Computer Graphics*, 1977. ISBN 90 6196 142 4.
- * MCS 36 J.M. AARTS, J. DE VRIES (red.), *Colloquium Topologische Dynamische Systemen*, 1977. ISBN 90 6196 143 2.

De met een * gemerkte uitgaven moeten nog verschijnen.